

Parte A

A1

Con $z = e^{it}$, $dt = dz/(iz)$, $\cos t = \frac{z^2+1}{2z}$, $7 + 2 \cos t = \frac{z^2+7z+1}{z}$:

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{z^2+1}{2iz(z^2+7z+1)} dz.$$

Poli in $|z| < 1$: $z = 0$ e $z_1 = \frac{-7+3\sqrt{5}}{2}$ (radice di z^2+7z+1). Con $z_1^2+1 = -7z_1$ (dalla relazione $z_1^2 = -7z_1 - 1$) e $z_1 - z_2 = 3\sqrt{5}$:

$$\text{Res}_0 = \frac{1}{2i}, \quad \text{Res}_{z_1} = \frac{-7z_1}{2iz_1 \cdot 3\sqrt{5}} = \frac{-7}{6i\sqrt{5}}.$$

$$I = 2\pi i \left(\frac{1}{2i} - \frac{7}{6i\sqrt{5}} \right) = \pi \left(1 - \frac{7}{3\sqrt{5}} \right) = \pi - \frac{7\sqrt{5}}{15}\pi = \frac{(15-7\sqrt{5})\pi}{15} \approx -0.1367.$$

A2

f è pari, quindi $b_n = 0$.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f = 8\pi^2, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f \cos(nt) dt = \frac{24(-1)^{n+1}}{n^2}.$$

(a)

$$S(t) = 4\pi^2 + 24 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos(nt).$$

(b) Valutando in $t = 0$: $f(0) = 6\pi^2 = S(0) = 4\pi^2 + 24 \sum (-1)^{n+1}/n^2$, da cui

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

(c) Identità di Parseval, $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2 dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n^2$:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2 = \frac{2}{\pi} \cdot 36 \int_0^{\pi} (\pi^2 - t^2)^2 dt = \frac{72}{\pi} \cdot \frac{8\pi^5}{15} = \frac{192\pi^4}{5}.$$

$$\frac{192\pi^4}{5} = \frac{(8\pi^2)^2}{2} + 576 \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^4} = 32\pi^4 + 576 S \implies S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

A3

Con $\widehat{u}(\omega) = \mathcal{F}[u]$, $\mathcal{F}[u'] = i\omega\widehat{u}$, $\mathcal{F}[u''] = -\omega^2\widehat{u}$, l'equazione $-u'' + 3u' + 18u = e^{-6|t|}$ diventa

$$(\omega^2 + 3i\omega + 18)\widehat{u}(\omega) = \frac{12}{36 + \omega^2}, \quad \omega^2 + 3i\omega + 18 = (\omega - 3i)(\omega + 6i).$$

$$\widehat{u}(\omega) = \frac{12}{(\omega - 6i)(\omega + 6i)^2(\omega - 3i)} = \frac{i/36}{\omega - 6i} + \frac{-4i/81}{\omega - 3i} + \frac{7i/324}{\omega + 6i} + \frac{-1/9}{(\omega + 6i)^2}.$$

Usando $\mathcal{F}[e^{-at}H(t)] = \frac{-i}{\omega - ia}$, $\mathcal{F}[e^{bt}H(-t)] = \frac{i}{\omega + ib}$, $\mathcal{F}[te^{bt}H(-t)] = \frac{1}{(\omega + ib)^2}$ ($a, b > 0$), anti-trasformando:

$$u(t) = \begin{cases} \frac{4}{81}e^{-3t} - \frac{1}{36}e^{-6t}, & t \geq 0, \\ \left(\frac{7}{324} - \frac{t}{9}\right)e^{6t}, & t < 0. \end{cases}$$

A4

$\mathcal{L}[X''] = s^2\widehat{X}$, $\mathcal{L}[X'] = s\widehat{X}$ (condizioni iniziali nulle), $\mathcal{L}[te^{-2t}] = 1/(s+2)^2$:

$$(s-2)^2\widehat{X}(s) = \frac{1}{(s+2)^2} \implies \widehat{X}(s) = \frac{1}{(s-2)^2(s+2)^2}.$$

Fratti semplici (per simmetria $s \rightarrow -s$):

$$\widehat{X}(s) = \frac{-1/32}{s-2} + \frac{1/16}{(s-2)^2} + \frac{1/32}{s+2} + \frac{1/16}{(s+2)^2}.$$

$$X(t) = H(t) \left[\frac{t}{8} \cosh(2t) - \frac{1}{16} \sinh(2t) \right].$$

(Verifica diretta: $X(0) = X'(0) = 0$ e $X'' - 4X' + 4X = te^{-2t}$.)

A5

$$\mathcal{F}[e^{-4|t|} * e^{-6|t|}](\omega) = \frac{8}{16 + \omega^2} \cdot \frac{12}{36 + \omega^2} = \frac{96}{(\omega^2 + 16)(\omega^2 + 36)} = \frac{24/5}{\omega^2 + 16} - \frac{24/5}{\omega^2 + 36}.$$

Con $\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{\omega^2 + a^2}\right] = \frac{1}{2a}e^{-a|t|}$:

$$f(t) = \frac{3}{5}e^{-4|t|} - \frac{2}{5}e^{-6|t|}.$$

(Verifica: $f(0) = 1/5 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-10|s|} ds$.)

Parte B

B1 — Condizioni di Cauchy–Riemann

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$. **Teorema.** Assumiamo che u, v siano differenziabili in (x_0, y_0) ; allora f è olomorfa in $z_0 = (x_0, y_0)$ se e solo se

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

B2

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{(\omega + 4i)^2(\omega - 4i)(\omega - 7i)}.$$

Proprietà principali di $f = \mathcal{F}^{-1}[\widehat{f}]$:

- **Realtà:** $\widehat{f}(-\omega) = \overline{\widehat{f}(\omega)}$ (verifica diretta sui fattori), quindi f è a valori *reali*.
- **Regolarità/decadimento in frequenza:** $\widehat{f}(\omega) = O(\omega^{-4})$, $\omega^2 \widehat{f} \in L^1$ ma $\omega^3 \widehat{f} \notin L^1$: $f \in C^1(\mathbb{R})$, con f, f' continue e infinitesime all'infinito, mentre f'' può avere un salto; inoltre, $\omega^3 \widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$: $f, f', f'' \in L^2(\mathbb{R})$.
- **Andamento all'infinito:** $\forall n \in \mathbb{N}$ risulta $\frac{d^n}{d\omega^n} \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ è $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} t^n f(t) = 0 \Rightarrow f$ decade esponenzialmente per $|t| \rightarrow \infty$, con tasso dettato dal polo più vicino all'asse reale ($\text{Im} = \pm 4$).
- **Struttura esplicita** (chiudendo il contorno nel semipiano superiore/inferiore secondo il segno di t): poli $4i, 7i$ (semipiano superiore, semplici) governano $t > 0$; polo $-4i$ (semipiano inferiore, doppio) governa $t < 0$:

$$f(t) = H(t)(Ae^{-4t} + Be^{-7t}) + H(-t)(C + Dt)e^{4t},$$

con A, B, C, D ottenibili da fratti semplici come in A3; il termine Dte^{4t} segnala il polo doppio (nessuna risonanza con un'equazione differenziale qui, è solo molteplicità del polo).

B3 — Teorema sul supporto della convoluzione

Se f, g sono funzioni tali che $f * g$ è ben definita (es. almeno una a supporto compatto, o entrambe opportunamente integrabili in modo che l'integrale di convoluzione converga), allora

$$\boxed{\text{supp}(f * g) \subseteq \overline{\text{supp}(f) + \text{supp}(g)}}, \quad \text{supp } f + \text{supp } g = \{x + y : x \in \text{supp } f, y \in \text{supp } g\}.$$

Ipotesi essenziali: la somma degli insiemi dei supporti deve essere chiusa (o si prende la chiusura), e la convoluzione deve convergere in senso classico. Conseguenza fondamentale: se $\text{supp } f, \text{supp } g \subseteq [0, \infty)$ (segnali causali) allora $\text{supp}(f * g) \subseteq [0, \infty)$ — è il fatto che giustifica la causalità delle soluzioni ottenute con $\mathcal{L}$ (cfr. A4).

B4 — Teorema di inversione della trasformata di Laplace

Sia $f : \text{Res} > \sigma_0 \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa nello stesso insieme, limitata in $\text{Res} \geq \bar{\lambda} > \sigma_0$, e tale che esistano $M > 0, \alpha \geq 1, \mu \geq \sigma_0$ per cui

$$|f(s)| \leq \frac{M}{|s|^\alpha} \quad \text{in } \text{Res} > \mu.$$

Allora f è la $\mathcal{L}$ -trasformata di una $F \in E$ e risulta

$$\boxed{F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} f(s)e^{st} ds \quad (\text{integrale da intendere in v.p.}) \quad \text{con } \gamma > \mu.}$$

B5 — Inversione della trasformata Z

Data $X(z) = \mathcal{Z}[f](z) = \sum_n f_n z^{-n}$ con raggio di convergenza R , l'inversione è data

- dall'integrale di linea

$$f_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_r(0)} X(z) z^{n-1} dz,$$

con $C_r(0)$ circonferenza di centro l'origine e raggio $r > R$, percorsa in senso antiorario,

- oppure dalla relazione $f_n = \frac{1}{n!} \left[\frac{d^n}{dz^n} X\left(\frac{1}{z}\right) \right] \Big|_{z=0},$

- oppure dalla relazione di ricorrenza

$$f_o = \lim_{z \rightarrow z_\infty} X(z),$$

$$f_1 = \lim_{z \rightarrow z_\infty} z(X(z) - f_o),$$

$$f_2 = \lim_{z \rightarrow z_\infty} z^2 \left(X(z) - f_o - \frac{f_1}{z} \right),$$

$\vdots$