

PARTE A

$$\textcircled{1} \quad I = \text{vp} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-5it}}{t(t^2+4)} dt \quad \left| \begin{array}{l} \text{Notiamo } e^{-5it} \\ \text{con coefficiente } -5 \\ \text{negativo} \end{array} \right.$$

Applicando il Lemma di Jordan, abbiamo

$$I = -2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{e^{-5iz}}{z(z^2+4)}, -2i \right)$$

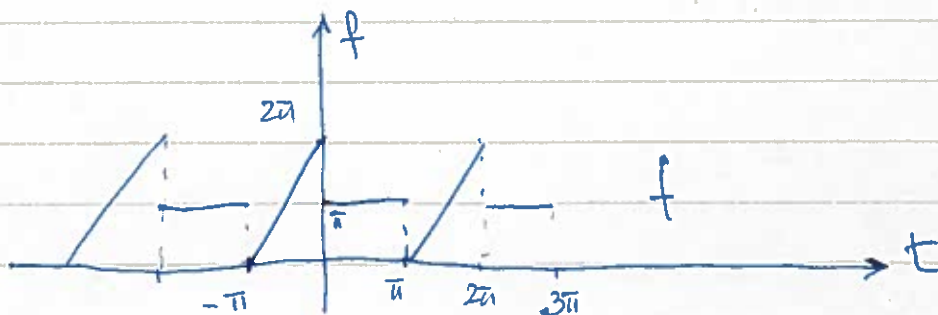
$$+ \pi i \operatorname{Res} \left(\frac{e^{-5iz}}{z(z^2+4)}, 0 \right)$$

$$= -2\pi i \frac{e^{-5iz}}{z \cdot 2z} \Big|_{z=-2i} + \pi i \frac{e^{-5iz}}{z^2+4} \Big|_{z=0}$$

$$= -\cancel{2}\pi i \frac{e^{-10}}{2 \cancel{2} \cdot 2i} + \pi i \frac{1}{4}$$

$$= -\frac{\pi i}{4} (1 - e^{-10}) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Ricordiamo che } -5 < 0 \\ \text{quindi occorre stare in } \operatorname{Im} z \leq 0 \end{array} \right.$$

②



La funzione f è limitata e 2π -periodica. Pertanto, $f \in L^2(-\pi, \pi)$ ed è sviluppabile in serie di Fourier

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \frac{1}{\pi} \left[\pi \cdot \frac{2\pi}{2} + \pi \cdot \pi \right] = 2\pi$$

$$\frac{a_0}{2} = \pi$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 f(t) \cos nt dt + \int_0^{\pi} f(t) \cos nt dt \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 (2t+2\pi) \cos nt dt + \pi \int_0^{\pi} \cos nt dt \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\left((2t+2\pi) \frac{\sin nt}{n} \right) \Big|_{-\pi}^0 - 2 \int_{-\pi}^0 \frac{\sin nt}{n} dt + \pi \left(\frac{\sin nt}{n} \right) \Big|_0^{\pi} \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[2 \frac{\cos nt}{n^2} \Big|_{-\pi}^0 \right] = \frac{2}{\pi} \frac{1 - (-1)^n}{n^2} \end{aligned}$$

Possiamo anche scrivere

$$a_{2m} = 0, \quad a_{2m+1} = \frac{4}{\pi (2m+1)^2} \quad m \geq 0$$

inoltre

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt dt = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 f(t) \sin nt dt + \int_0^{\pi} f(t) \sin nt dt \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 (2t+2\pi) \sin nt dt + \pi \int_0^{\pi} \sin nt dt \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi} \left[-\left(2t+2\pi\right) \frac{\cos nt}{n} \right]_{-\pi}^0 + 2 \int_{-\pi}^0 \frac{\cos nt}{n} dt \\
&\quad - \left[\pi \frac{\cos nt}{n} \right]_0^{\pi} = \\
&= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{2\pi}{n} + 2 \frac{\sin nt}{n^2} \right]_{-\pi}^0 - \frac{1}{\pi} \frac{(-1)^n - 1}{n} \\
&= -\frac{2}{n} - \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n} = -\frac{1+(-1)^n}{n}
\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
S(t) &= \pi + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{1-(-1)^n}{\pi n^2} \cos nt - \frac{1+(-1)^n}{n} \sin nt \\
&= \pi + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi (2n+1)^2} \cos(2n+1)t + \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1+(-1)^n}{n} \right) \sin nt
\end{aligned}$$

Osserviamo che

$\forall t \neq k\pi$ f è continua e derivabile in t ;
 pertanto $S(t) = f(t)$

$\forall t_k = 2k\pi$ f ha in t_k un salto di ampiezza finita
 e le pendenze ai due lati del salto sono finite.
 Pertanto $S(t_k) = \frac{f(2k\pi^+) + f(2k\pi^-)}{2}$
 $= \frac{\pi + 2\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi$

$\forall t_n = (2n+1)\pi$ f ha in t_n un salto di ampiezza finita e le pendenze ai due lati del salto sono finite. Pertanto

$$S(t_n) = \frac{f((2n+1)\pi^+) + f((2n+1)\pi^-)}{2} \\ = \frac{0 + \pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

(3) Data $f = -\chi_{[-2\pi, \pi)}(t) + \chi_{[-\pi, \pi]} \cos \frac{t}{2} +$
 $-\chi_{(\pi, 2\pi]}(t),$

osserviamo che possiamo riscrivere (tenendo conto che $\cos \alpha = \frac{1}{2}e^{i\alpha} + \frac{1}{2}e^{-i\alpha}$)

$$f(t) = -\chi_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}(t + \frac{3\pi}{2}) + \frac{1}{2}\chi_{[-\pi, \pi]}e^{it/2} \\ + \frac{1}{2}\chi_{[-\pi, \pi]}e^{-it/2} - \chi_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}(t - \frac{3\pi}{2})$$

Quindi, utilizzando le relazioni fondamentali e le tabelle, otteniamo che

$$\hat{f}(\omega) = -2 \frac{\sin \pi/2 \omega}{\omega} e^{-\frac{3}{2}\pi i \omega} - 2 \frac{\sin \pi/2 \omega}{\omega} e^{\frac{3}{2}\pi i \omega} \\ + \frac{1}{2} \frac{\sin \pi(\omega - 1/2)}{\omega - 1/2} + \frac{1}{2} \frac{\sin \pi(\omega + 1/2)}{\omega + 1/2}$$

$$= \left(\frac{\sin(\omega - 1/2)\pi}{\omega - 1/2} + \frac{\sin \pi(\omega + 1/2)}{\omega + 1/2} \right)$$

$$= 4 \frac{\sin \frac{\pi}{2} \omega}{\omega} \cos \frac{3}{2} \pi \omega.$$

$$\textcircled{4} \quad -4Y * Y' + Y' + Y'' = \frac{1}{2} \int_0^t \sinh(2\tau) d\tau, \quad t > 0$$

$$Y(0) = Y'(0) = 0.$$

Utilizzando la L. trasformata e le relazioni fondamentali, otteniamo

$$-4y \cdot sy + sy \cdot s^2 y = \frac{1}{2} \frac{1}{s} \frac{2}{s^2 - 4}$$

$$y^2(s^3 - 4s) = \frac{1}{s(s^2 - 4)}$$

$$y^2 = \frac{1}{s^2(s^2 - 4)^2} \Rightarrow y(s) = \pm \frac{1}{s(s^2 - 4)}$$

$$y(s) = \pm \frac{1}{2} \frac{1}{s} \frac{2}{s^2 - 4} +$$

$$\Rightarrow Y(t) = \pm \frac{1}{2} \int_0^t \sinh(2\tau) d\tau$$

Integrando,

$$Y(t) = \pm \frac{1}{2} \left. \frac{\cosh 2\tau}{2} \right|_0^t$$

$$= \pm \frac{1}{4} [\cosh 2t - 1]$$

$$\textcircled{5} \quad F^*(z) = \frac{z(z-1)}{(z^2+4)(z^2+9)}$$

Usiamo la formula di inversione ed otteniamo

$$f_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R(0)} \frac{z(z-1)}{(z^2+4)(z^2+9)} z^{m-1} dz$$

dove $C_R(0)$ è la circonferenza di centro l'origine e raggio R , orientata positivamente. Il raggio R è arbitrario, ma maggiore di 3.

Dal Teorema dei Residui, otteniamo

$$f_m = \frac{1}{2\pi i} \cancel{2\pi i} \sum_k \operatorname{Res} \left(\frac{z^m(z-1)}{(z^2+4)(z^2+9)}, z_k \right)$$

dove $z_k = \pm 2i, \pm 3i$

Pertanto

$$\begin{aligned} f_m = & \frac{z^m(z-1)}{2z(z^2+9)} \Big|_{z=2i} + \frac{z^m(z-1)}{2z(z^2+9)} \Big|_{z=-2i} \\ & + \frac{z^m(z-1)}{2z(z^2+4)} \Big|_{z=3i} + \frac{z^m(z-1)}{2z(z^2+4)} \Big|_{z=-3i} \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
 f_m &= \frac{2^m i^m (2i-1)}{2 \cdot 2i (9-4)} + \frac{(-2)^m i^m (-2i-1)}{-2 \cdot 2i (9-4)} \\
 &+ \frac{3^m i^m (3i-1)}{2 \cdot 3i (-9+4)} + \frac{(-3)^m i^m (-3i-1)}{-2 \cdot 3i (-9+4)} \\
 &= \frac{1}{4i} \frac{i^m}{5} \left[2^m (2i-1) - (-2)^m (-2i-1) \right] \\
 &- \frac{1}{6i} \frac{i^m}{5} \left[3^m (3i-1) - (-3)^m (-3i-1) \right]
 \end{aligned}$$

Se distinguiamo indici pari ed indici dispari, con semplici calcoli otteniamo

$$f_{2k} = \frac{1}{5} \left[(2i)^{2k} - (3i)^{2k} \right] = \frac{1}{5} \left[(-)^k 4^k - (-)^k 9^k \right] = \frac{1}{5} [(-4)^k - (-9)^k]$$

e

$$\begin{aligned}
 f_{2k+1} &= -\frac{1}{5} \left[(2i)^{2k+1} - (3i)^{2k+1} \right] \\
 &= -\frac{1}{5} \left[\frac{(2i)^{2k+1}}{2i} - \frac{(3i)^{2k+1}}{3i} \right] = -\frac{1}{5} \left[(-)^k 4^k - (-)^k 9^k \right] \\
 &= -\frac{1}{5} [(-4)^k - (-9)^k].
 \end{aligned}$$

PARTE B

① Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un insieme aperto e $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$

con $f(x, y) = u(x, y) + i v(x, y)$, $x = \operatorname{Re} z$
 $y = \operatorname{Im} z$

una funzione differenziabile in Ω . Allora, f è
domante in Ω se e solo se

$$if_x = f_y \iff \begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \text{ in } \Omega$$

La condizione può essere espressa anche in una sola $z \in \Omega$.

$$(2) f \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{f} \in C_0^\circ(\mathbb{R}), \quad \hat{f} \text{ limitata}$$

$$f \in L^2(\mathbb{R}) \iff \hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad t^n f \in L^1 \cap L^2 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad \hat{f}^{(n)} \in C_0^\circ \cap L^2$$

f ha supporto compatto e $\text{supp } f = [-2\pi, 2\pi]$

$$\Rightarrow \hat{f} \text{ è analitica intera e } |\hat{f}(z)| \leq A e^{2\pi |Im z|}$$

dove A è una costante opportuna

$$f \text{ è pari reale} \Rightarrow \hat{f} \text{ è pari reale}$$

Osserviamo che f è discontinua in $\mathbb{R}$

$$(3) \text{ Date } g, f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{se}$$

$$f \in L^1 \text{ e } g \in L^2$$

$$f \in L^1 \text{ e } g \in L^1 \quad \text{oppure}$$

oppure

$$f \in L^2 \text{ e } g \in L^2$$

allora $\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$

④ Sia $f: \operatorname{Re} s > \lambda \rightarrow \mathbb{C}$, ~~analitica~~ olomorfa in

$\operatorname{Re} s > \lambda$ e limitata in $\operatorname{Re} s \geq \bar{\lambda} > \lambda$;
 supponiamo inoltre che $\lim_{\operatorname{Re} s \rightarrow \infty} f(s) = 0$.

Se esistono $\mu \geq \lambda$, $\alpha \geq 1$, $M > 0$ t.c.

$$|f(s)| \leq \frac{M}{|s|^\alpha} \text{ in } \operatorname{Re} s > \mu,$$

allora f è la $\mathcal{L}$ -trasformata di una $F \in E$
 e risulta

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{st} f(s) ds$$

dove x è arbitrario, purché $x > \mu$.

⑤ 1° Formula di inversione

$$f_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R(0)} F^*(z) z^{n-1} dz$$

data $C_R(0)$ è la circonferenza di centro l'origine

e raggio $\bar{R} >$ raggio di convergenza della Z -trasformata,
orientata positivamente

2° Formula di ~~inversione~~ inversione

$$f_n = \frac{1}{n!} \left[\frac{d^n}{dz^n} F^* \left(\frac{1}{z} \right) \right]_{z=0}$$

3° Formula di inversione

$$f_0 = \lim_{z \rightarrow z_\infty} F^*(z)$$

$$f_1 = \lim_{z \rightarrow z_\infty} z (F^*(z) - f_0)$$

$$f_2 = \lim_{z \rightarrow z_\infty} z^2 \left(F^*(z) - f_0 - \frac{f_1}{z} \right)$$

⋮