PARTE A

① $$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+6)(x^2+8)}\,dx$$

Se consideriamo $f(z) = \dfrac{z^2}{(z^2+6)(z^2+8)}$, osserviamo che f ha quattro poli di ordine 1 in

$$z = \pm\sqrt{6}\,i, \qquad z = \pm\sqrt{8}\,i$$

Pertanto, abbiamo

$$I = 2\pi i\left[\operatorname{Res}(f, \sqrt{6}\,i) + \operatorname{Res}(f, \sqrt{8}\,i)\right]$$

$$= \cancel{2}\pi i\left[\frac{z^{\cancel{2}}}{\cancel{2}\cancel{z}(z^2+8)}\bigg|_{z=\sqrt{6}\,i} + \frac{z^{\cancel{2}}}{\cancel{2}\cancel{z}(z^2+6)}\bigg|_{z=\sqrt{8}\,i}\right]$$

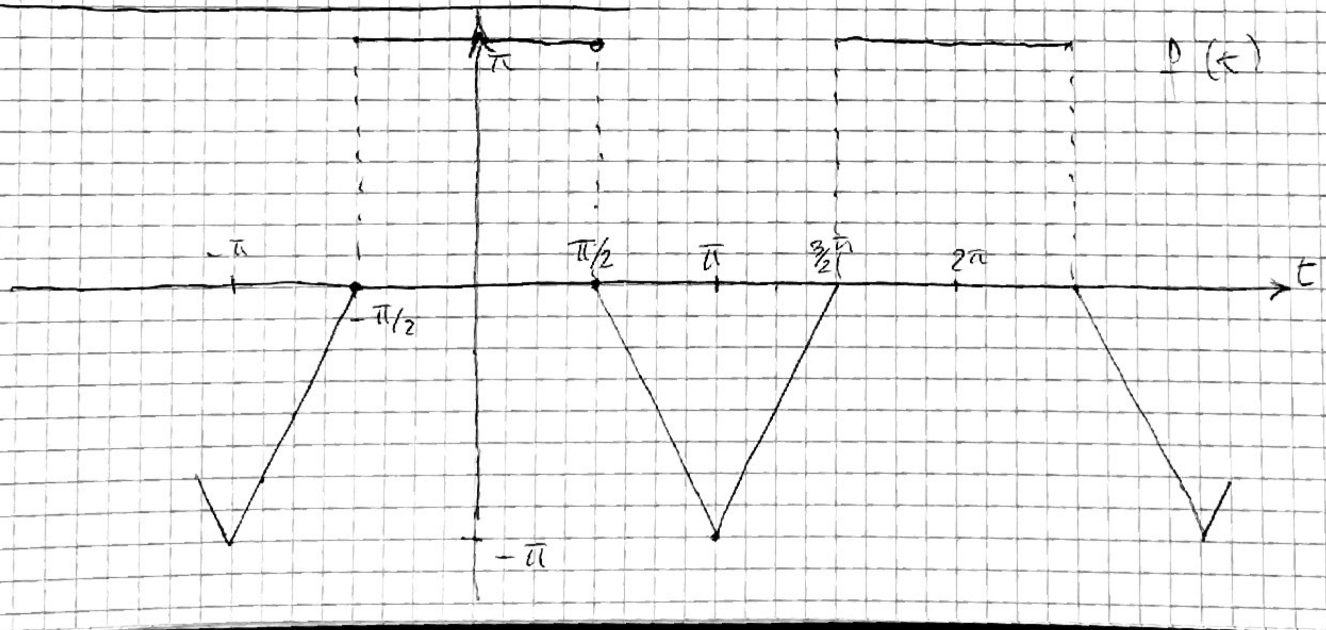
$$= \frac{\cancel{2}\pi i}{\cancel{2}}\left[\frac{\sqrt{6}\,i}{8-6} + \frac{\sqrt{8}\,i}{-8+6}\right]$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[-\sqrt{6} + \sqrt{8}\right] = \frac{\pi(\sqrt{8}-\sqrt{6})}{2}$$

Osserviamo che, concordemente col fatto che $f(x) \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$, risulta $I > 0$.

---

②



È chiaro che f è limitata, quindi $f \in L^2(-\pi, \pi)$ ed è, pertanto, sviluppabile in serie di Fourier.
Poiché f è pari, abbiamo

$$b_n = 0 \qquad \forall\, n \geq 1$$

Inoltre

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,dt = \frac{2}{\pi}\left[\pi \cdot \frac{\pi}{2} - \pi \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2}\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{4}\right) = \frac{2}{\pi}\,\frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{a_0}{2} = \frac{\pi}{4}}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2} \pi \cos nt\,dt + \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - 2t)\cos nt\,dt\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\pi \frac{\sin nt}{n}\Big|_0^{\pi/2} + (\pi - 2t)\frac{\sin nt}{n}\Big|_{\pi/2}^{\pi} + 2\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin nt}{n}\,dt\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\pi \frac{\sin n\frac{\pi}{2}}{n} - \underbrace{\cancel{\pi \frac{\sin n\pi}{n}}}_{=0} - 2\frac{\cos nt}{n^2}\Big|_{\pi/2}^{\pi}\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\pi \frac{\sin n\pi/2}{n} - \frac{2(-)^n}{n^2} + 2\frac{\cos n\pi/2}{n^2}\right)$$

In particolare, possiamo osservare che

$$a_{2k} = \frac{2}{\pi}\left(\underbrace{\cancel{\frac{\pi \sin k\pi}{2k}}}_{=0} - \frac{2(-)^{2k}}{4k^2} + \frac{2(-)^k}{4k^2}\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{2}{4k^2} + \frac{2(-)^k}{4k^2}\right) = +\frac{2 \cdot 2}{2\pi}\,\frac{(-)^k - 1}{2k^2}$$

$$= \frac{(-)^k - 1}{\pi k^2}, \qquad k \geq 1$$

$$a_{2k+1} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi \sin (2k+1)\frac{\pi}{2}}{2k+1} - \frac{2(-)^{2k+1}}{(2k+1)^2}\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\pi \frac{(-)^k}{2k+1} + \frac{2}{(2k+1)^2}\right), \qquad k \geq 0$$

Concludiamo che (utilizziamo la forma completa, senza distinguere tra pari e dispari)

$$S(t) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi \sin n\pi/2}{n} - \frac{2(-)^n}{n^2} + 2\frac{\cos n\pi/2}{n^2}\right] \cdot \cos nt$$

Quanto alla convergenza, osserviamo che

1) Se $t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

e $t \neq (2m+1)\pi \quad m \in \mathbb{Z}$

f è continua e derivabile in t, pertanto

$S(t) = f(t)$;

2) Se $t_k = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

f in t_k ha un salto di ampiezza finita e le pendenze ai due lati del salto sono finite.

Pertanto $S(t_k) = \frac{1}{2}\left(f(t_k^+) + f(t_k^-)\right)$

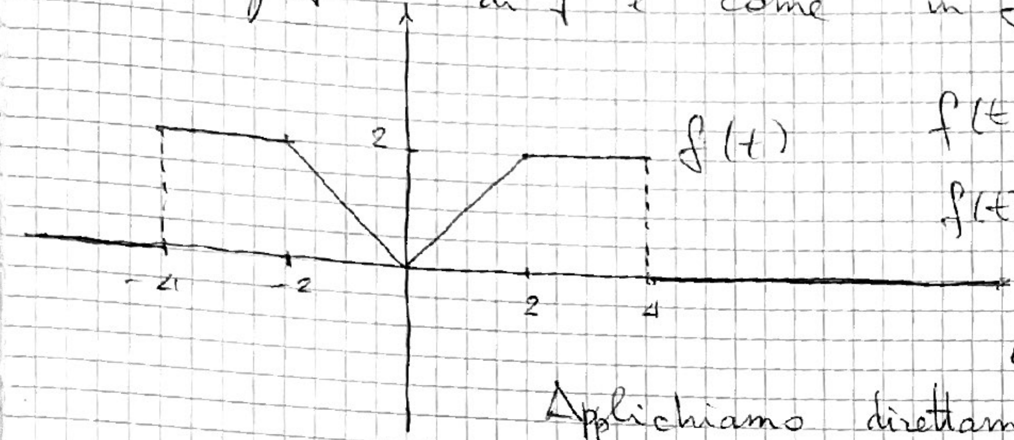
$= \frac{1}{2}(0 + \pi) = \pi/2$

3) Se $t_m = (2m+1)\pi, \quad m \in \mathbb{Z}$

f ha in t_m un punto angoloso. Pertanto

$S(t_m) = f(t_m) = -\pi$.

③ Dalla definizione (f pari) ricaviamo che il grafico di f è come in figura



$f(t) = -t$ se $t \in [-2,0]$;

$f(t) = t$ se $t \in [0,2]$.

Applichiamo direttamente la definizione.

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-4}^{-2} 2\, e^{-i\omega t}\, dt + \int_{-2}^{0} -t\, e^{-i\omega t}\, dt$$

$$+ \int_{0}^{2} t e^{-i\omega t}\, dt + \int_{2}^{4} 2 e^{-i\omega t}\, dt$$

$$= 2 \left. \frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega} \right|_{-4}^{-2} - t \left. \frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega} \right|_{-2}^{0}$$

$$- \frac{1}{i\omega} \int_{-2}^{0} e^{-i\omega t} dt + t \left. \frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega} \right|_{0}^{2}$$

$$+ \frac{1}{i\omega} \int_{0}^{2} e^{-i\omega t} dt + 2 \left. \frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega} \right|_{2}^{4} =$$

$$= 2 \left(\cancel{\frac{e^{2i\omega}}{-i\omega}} - \frac{e^{4i\omega}}{-i\omega} \right)$$

$$- 2 \cancel{\frac{e^{2i\omega}}{-i\omega}} + \frac{1}{(i\omega)^2} \left. e^{-i\omega t} \right|_{-2}^{0}$$

$$+ 2 \cancel{\frac{e^{-2i\omega}}{-i\omega}} - \frac{1}{(i\omega)^2} \left. e^{-i\omega t} \right|_{0}^{2} + 2 \left(\frac{e^{-4i\omega}}{-i\omega} - \cancel{\frac{e^{-2i\omega}}{-i\omega}} \right)$$

$$= 2\,\frac{e^{4i\omega}}{i\omega} - 2\,\frac{e^{-4i\omega}}{i\omega} - \frac{1}{\omega^2}\left(1 - e^{+2i\omega}\right)$$

$$+ \frac{1}{\omega^2}\left(e^{-2i\omega} - 1\right) =$$

$$= 4\,\frac{\sin 4\omega}{\omega} - \frac{1}{\omega^2}\left(2 - 2\cos 2\omega\right)$$

$$= 4\,\frac{\sin 4\omega}{\omega} - 2\,\frac{1 - \cos 2\omega}{\omega^2}$$

Il risultato si poteva ottenere anche in altro modo, osservando che

$$f(t) = 2\chi_{[-4,-2]} + |t|\,\chi_{[-2,2]} +$$

$$+ 2\chi_{[2,4]}$$

$$= 2\chi_{[-4,-2]} + 2\chi_{[-2,2]}$$

$$- (2 - |t|)_+ + 2\chi_{[2,4]}$$

$$= 2\chi_{[-4,4]} - (2-|t|)_+$$

e dalle tabelle otteniamo il risultato sopra.

---

(4) Applicando la Z-trasformata e indicando con $F^*(z) = Z(y_n)$, abbiamo

$$z^2\left[F^*(z) - y_0 - z^{-1}y_1\right] - 9z\left[F^*(z) - y_0\right]$$

$$+ 20 F^*(z) = \frac{z}{(z-1)^2}, \quad \text{cioè anche},$$

$$(z^2 - 9z + 20) F^*(z) - z = \frac{z}{(z-1)^2},$$

cioè anche

$$F^*(z) = \frac{z}{z^2-9z+20} + \frac{z}{(z^2-9z+20)(z-1)^2}$$

$$= z\, G_1(z) + z\, G_2(z)$$

dove (applicando la scomposizione in fratti semplici)

$$G_1(z) = \frac{1}{z^2-9z+20} = \frac{1}{(z-4)(z-5)}$$

$$= \frac{Res(G_1, 4)}{z-4} + \frac{Res(G_1, 5)}{z-5}$$

$$= -\frac{1}{z-4} + \frac{1}{z-5}$$

e

$$G_2(z) = \frac{1}{(z^2-9z+20)(z-1)^2} = \frac{1}{(z-4)(z-5)(z-1)^2}$$

$$= \frac{Res(G_2, 4)}{z-4} + \frac{Res(G_2, 5)}{z-5}$$

$$+ \frac{Res(G_2, 1)}{z-1} + \frac{\frac{1}{(-3)(-4)}}{(z-1)^2}$$

$$= -\frac{1}{9}\,\frac{1}{z-4} + \frac{1}{16}\,\frac{1}{z-5} + \frac{1}{12}\,\frac{1}{(z-1)^2}$$

$$-\left[\frac{2z-9}{(z-4)^2(z-5)^2}\bigg|_{z=1}\right]\cdot\frac{1}{z-1}$$

In definitiva, dunque

$$F^*(z) = \frac{z}{z-5} - \frac{z}{z-4}$$

$$+ \frac{1}{16}\frac{z}{z-5} - \frac{1}{9}\frac{z}{z-4} + \frac{1}{12}\frac{z}{(z-1)^2}$$

$$+ \frac{7}{9\cdot 16}\frac{z}{z-1},$$

da cui otteniamo (per esempio grazie alle tabelle)

$$y_n = 5^n\left(1+\frac{1}{16}\right) - 4^n\left(1+\frac{1}{9}\right) + \frac{1}{12}n +$$

$$+ \frac{7}{144} =$$

$$= \frac{17}{16}5^n - \frac{10}{9}4^n + \frac{7}{144} + \frac{1}{12}n.$$

---

(5) Applicando la trasformata di Laplace, abbiamo

$$s^2 X(s) - s - 1 - 9sX(s) + 9 + 20X(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$$

$$(s^2 - 9s + 20)X(s) = \frac{1}{(s+1)^2} + s - 8$$

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)^2(s-4)(s-5)} + \frac{s-8}{(s-4)(s-5)}$$

$$= X_1(s) + X_2(s)$$

Abbiamo

$$X_2(s) = \frac{A}{s-5} + \frac{B}{s-4}$$

dove $A = \left.\frac{s-8}{s-4}\right|_{s=5} = -3$, $B = \left.\frac{s-8}{s-5}\right|_{s=4} = 4$

Quindi

$$x_2(s) = \frac{4}{s-4} - \frac{3}{s-5}$$

$$\longrightarrow \; x_2(t) = H(t)\left(4e^{4t} - 3e^{5t}\right).$$

$$x_1(s) = \frac{A}{s-5} + \frac{B}{s-4} + \frac{C}{s+1} + \frac{D}{(s+1)^2}$$

dove

$$A = \left.\frac{1}{(s-4)(s+1)^2}\right|_{s=5} = \frac{1}{36} = \frac{1}{36}$$

$$B = \left.\frac{1}{(s-5)(s+1)^2}\right|_{s=4} = -\frac{1}{25} = -\frac{1}{25}$$

$$D = \left.\frac{1}{(s-5)(s-4)}\right|_{s=-1} = \frac{1}{30} = \frac{1}{30}$$

$$C = \lim_{s\to -1} \frac{d}{ds} \frac{1}{s^2-9s+20}$$

$$= \lim_{s\to -1} -\frac{2s-9}{(s-4)^2(s-5)^2} = \frac{+11}{36\cdot 25} = \frac{11}{900}$$

Quindi

$$x_1(s) = \frac{1}{36}\,\frac{1}{s-5} - \frac{1}{25}\,\frac{1}{s-4} + \frac{1}{30}\,\frac{1}{(s+1)^2} + \frac{11}{900}\,\frac{1}{s+1}$$

$$\longrightarrow \; x_2(t) = H(t)\left[\frac{1}{36}e^{5t} - \frac{1}{25}e^{4t} + \frac{11}{900}e^{-t} + \frac{1}{30}te^{-t}\right]$$

In definitiva, otteniamo

$$x(t) = H(t)\left(4 - \frac{1}{25}\right)e^{4t} + H(t)\left(\frac{1}{36} - 3\right)e^{5t}$$

$$+ \frac{11}{900} H(t) e^{-t} + \frac{1}{30} H(t) t e^{-t}$$

$$= \frac{99}{25} H(t) e^{4t} - \frac{107}{36} H(t) e^{5t} + \frac{11}{900} H(t) e^{-t}$$

$$+ \frac{1}{30} H(t) t e^{-t}.$$

PARTE B

① Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un insieme aperto e $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa in Ω.
Preso $z_0 \in \Omega$ e $R > 0$ t.c. $\overline{B_R(z_0)} \subset \Omega$ abbiamo che $\forall z \in B_R(z)$ è

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R(z_0)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, d\xi$$

dove $C_R(z_0)$ è la circonferenza di centro z_0 e raggio R orientata positivamente.

---

② f è pari reale $\Longrightarrow$ $\hat{f}$ è pari reale

$f \in L^1(\mathbb{R}) \Longrightarrow \hat{f} \in C_0^0(\mathbb{R})$, $\hat{f}$ limitata

$\forall n \in \mathbb{N}$ $t^n f \in L^1(\mathbb{R}) \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{R}$ $\hat{f}^{(n)} \in C_0^0(\mathbb{R})$
cioè $\hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R})$

$f \in L^2(\mathbb{R}) \iff \hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad t^n f \in L^2(\mathbb{R}) \implies \forall n \in \mathbb{N} \quad \hat{f}^{(n)} \in L^2(\mathbb{R})$

$\operatorname{supp} f \subseteq [-A, A] \implies \hat{f}$ è analitica intera

e $|\hat{f}(z)| \leq A\, e^{A|\operatorname{Im} z|}$

---

(3) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \in L^1(\mathbb{R})$ t.c. anche $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Allora

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega$$

---

(4) Sia $f : \{\operatorname{Re} s > \lambda\} \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa in $\operatorname{Re} s > \lambda$ e t.c. $\lim_{\operatorname{Re} s \to +\infty} f(s) = 0$.
Se esistono $M > 0$, $\alpha > 1$ t.c.

$$|f(s)| < \frac{M}{|s|^\alpha} \qquad \forall s \geq \bar{\lambda} > \lambda$$

allora f è una $\mathcal{L}$-trasformata, cioè $f = \mathcal{L}(F; s)$ con $F \in E$ e risulta

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f(s)\, e^{st}\, ds, \qquad c > \lambda.$$

---

(5) $\boxed{1}$ Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è 2π-periodica, limitata e tale che il periodo può essere scomposto in un numero finito di intervalli, in ciascuno dei

quali f è monotona, allora $\forall t$ nel periodo risulta

$$S(t) = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} .$$

oppure

[2] Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periodica e sia t_0 un punto dell'intervallo $[-\pi, \pi]$. Assumiamo che $f \in L^2(-\pi, \pi)$. Allora, se

a) f è continua e derivabile in t_0,

oppure

b) f è continua in t_0 e $f'(t_0^+)$, $f'(t_0^-)$ sono entrambe finite, ma diverse,

oppure

c) f ha in t_0 un salto di ampiezza finita e le pendenze del grafico di f agli estremi del salto sono entrambe finite

abbiamo

$$S(t_0) = \frac{f(t_0^+) + f(t_0^-)}{2} .$$

In entrambi i casi $S(t)$ indica la somma della serie di Fourier valutata in t.