

PARTE A

1. [6 pt] Data la serie di potenze in campo complesso $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{7^n}{n^3 + \cos n^2} \left(\frac{z}{3 \operatorname{Re} z + 10i} \right)^n$, deter-

minarne l'insieme di convergenza E ;

Precisare, inoltre, se E se è aperto o chiuso.

2. [7 pt] Calcolare l'integrale definito $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+5}{(x^2+16)(x^2-8x+32)} dx$ utilizzando opportunamente il Teorema dei Residui.

$I =$

3. [8 pt] Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, periodica di periodo 2π , definita da

$$f(t) = \begin{cases} (t + \pi)^2, & \text{se } -\pi \leq t < 0 \\ \pi(\pi - t), & \text{se } 0 \leq t < \pi. \end{cases}$$

(a) Scrivere la serie di Fourier della f

(b) Studiare la convergenza puntuale della serie a f

(c) Scrivere la serie numerica S che si ottiene ponendo $t = 0$ nell'espressione della serie di Fourier $S(t)$ e calcolarne la somma.

4. [7 pt] Per $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, definita da $f(t) = \frac{1}{(7t + 9i)^3}$, calcolare la \mathcal{F} -trasformata di f .

$\hat{f}(\omega) =$

5. [6 pt] Risolvere con la \mathcal{L} -trasformata il seguente Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} X''(t) - 8X'(t) + 16X(t) = H(t) t e^{5t}, & t > 0 \\ X(0) = X'(0) = 0. \end{cases}$$

PARTE B

1. [6 pt] Precisando tutte le ipotesi, dare la definizione di singolarità essenziale in z_o di una funzione f olomorfa in $\Omega \setminus \{z_o\}$, fornendo un esempio esplicito.

2. [8 pt] Per la funzione f dell'esercizio 4 della parte A, indicare le principali proprietà di \hat{f} , sulla base dei risultati della teoria della Trasformata di Fourier.

3. [6 pt] Date le due funzioni $F_1(t) = \chi_{(0,4]}(t)$ e $F_2(t) = H(t) t^2 e^{-t^4}$, mostrare che per entrambe l'ascissa di convergenza della \mathcal{L} -trasformata è $-\infty$. [Non si richiede il calcolo delle trasformate]

4. [6 pt] Si considerino le funzioni $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definite da $f(t) = e^{-2|t|}$, $g(t) = \frac{\sin^2(4t)}{t^2}$. In base ai principali risultati della teoria, determinare le più significative proprietà di $h(t) = (f * g)(t)$.

5. [8 pt] Giustificare perché per la serie di Fourier dell'esercizio 3 della parte A risulta

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (a_n^2 + b_n^2) < +\infty.$$