

PARTE A

1. [6 pt] Calcolare l'integrale

$$I = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin 2x}{x(x^2 + 9)} dx,$$

utilizzando metodi di Analisi Complessa. $I =$.

2. [7 pt] Si consideri la funzione
- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
- , periodica di periodo
- 2π
- , definita da

$$f(t) = \begin{cases} 3 + \frac{3}{\pi}t & \text{se } -\pi < t < 0, \\ 3 - \frac{3}{\pi}t & \text{se } 0 \leq t \leq \pi. \end{cases}$$

(a) Scrivere la Serie di Fourier della f . $S(t) =$.

(b) Utilizzando l'identità di Parseval, calcolare la somma della serie numerica $S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$.

$$S =$$
 .

3. [7 pt] (a) Data la funzione
- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
- , definita da
- $f(t) = \frac{\cos(3t)}{4^2 + t^2}$
- , calcolare la
- $\mathcal{F}$
- trasformata

di f . $\hat{f} =$.

(b) Utilizzando il Teorema di Plancherel, calcolare $I = \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos^2(3t)}{(4^2 + t^2)^2} dt$.

$$I =$$
 .

4. [7 pt] Date le funzioni
- $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
- , definite da
- $f(t) = \chi_{[-3,3]}(t)$
- e
- $g(t) = \frac{d}{dt} \frac{1}{5^2 + t^2}$
- , determinare l'espressione esplicita di
- $h(t) = (f * g)(t)$
- .

$$h(t) =$$
 .

5. [6 pt] Risolvere con la
- $\mathcal{L}$
- trasformata il seguente Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} X''(t) - 9X'(t) + 20X(t) = H(t)t, & t > 0 \\ X(0) = 1, \quad X'(0) = 2. \end{cases}$$

$$X(t) =$$
 .

PARTE B

1. [6 pt] Dare l'enunciato con tutte le ipotesi della I formula di Cauchy per una f olomorfa in un insieme $\Omega \subset \mathbb{C}$.

2. [8 pt] Per la funzione f dell'esercizio 3 della parte A, indicare le principali proprietà di $\hat{f}$, sulla base dei risultati della teoria della Trasformata di Fourier.

3. [7 pt] Date le due funzioni $F_1(t) = H(t) \frac{1-\cos t^2}{t^4}$ e $F_2(t) = H(t) \frac{1-e^{-t^4}}{t^4}$, mostrare che entrambe sono $\mathcal{L}$ -trasformabili. **[Non si richiede il calcolo delle trasformate]**

4. [7 pt] Per la convoluzione dell'esercizio 4 della parte A, indicare le sue principali proprietà, sulla base dei risultati noti dalla teoria .

5. [6 pt] Enunciare il Teorema della convoluzione, relativo alla $\mathcal{F}$ -trasformata della convoluzione, indicando precisamente per quali classi di funzioni vale.