PARTE A

1. [6 pt] Utilizzando metodi di Analisi Complessa, calcolare $I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin t}{5 + \sin t} dt$.

$I =$

2. [7 pt] Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, periodica di periodo 2π , definita da

$$f(t) = \begin{cases} t + \pi & \text{se } -\pi < t < 0, \\ \frac{\pi^2 - t^2}{\pi} & \text{se } 0 \leq t \leq \pi. \end{cases}$$

- (a) Scrivere la serie di Fourier della f . $S(t) =$

- (b) Studiare la convergenza puntuale della serie, precisando con cura il valore della somma

della serie nei vari punti. $S(t) =$

3. [8 pt] Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, definita da $f(t) = \frac{1}{(t - 4i)(t + 7i)}$.

- (a) Calcolare la $\mathcal{F}$ -trasformata di f ; $\hat{f} =$

- (b) Utilizzando i risultati del punto precedente, calcolare $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(t^2 + 16)(t^2 + 49)} dt$.

$I =$

4. [6 pt] Utilizzando la $\mathcal{L}$ -trasformata, risolvere il seguente problema di Cauchy in avanti:

$$\begin{cases} X'' - 5X' + 6X = H(t)e^{4t}, \\ X(0) = 0, \quad X'(0) = 1. \end{cases} \quad X(t) =$$

5. [7 pt] Determinare la successione $\{f_n\}_{n \geq 0}$, sapendo che la sua $\mathcal{Z}$ -trasformata, definita in

$|z| > 1$, è $F^*(z) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + \frac{1}{z}}{1 - \frac{1}{z}} \right)$. $f_{2n} =$

, $f_{2n+1} =$

PARTE B

1. [6 pt] Dare la definizione di z_o , polo di ordine 4 della funzione $f : \Omega \setminus \{z_o\} \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, olomorfa in $\Omega \setminus \{z_o\}$, fornendo un esempio.

2. [7 pt] Si consideri la funzione f dell'esercizio 3 della parte A: sulla base dei risultati della Teoria della Trasformata di Fourier, indicare le principali proprietà della sua trasformata $\hat{f}$.

3. [6 pt] Enunciare le condizioni sotto le quali vale la proprietà associativa per la convoluzione.

4. [7 pt] Enunciare i legami tra Trasformata di Fourier e convoluzione.

5. [8 pt] Enunciare la formula di inversione per la $\mathcal{L}$ -trasformata, precisando tutte le ipotesi.