

**PARTE A**

1. [6 pt] Data la funzione  $F^*(z) = \frac{1}{(z-3)(z+4)}$  in  $|z| > 4$ , determinare la successione

$\{f_n\}_{n \geq 0}$  di cui  $F^*(z)$  è la  $\mathcal{Z}$ -trasformata.

2. [6 pt] Per ogni  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  calcolare l'integrale definito  $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{int}}{7 + 2 \cos t} dt$ , utilizzando opportunamente il Teorema dei Residui.

$$c_n = \frac{\quad}{\quad}.$$

3. [8 pt] Si consideri la funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , periodica di periodo  $2\pi$ , definita da  $f(t) = \frac{1}{7+2 \cos t}$ .

(a) Usando la relazione  $c_{-n} = \bar{c}_n, \forall n \geq 0$ , scrivere la serie di Fourier della  $f$  ([**Può essere più comodo scriverla in forma esponenziale**]).

$$S(t) = \frac{\quad}{\quad}.$$

(b) Studiare la convergenza puntuale della serie di Fourier

(c) Studiare la convergenza uniforme della serie di Fourier

4. [7 pt] Per  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , definita da  $f(t) = \frac{1}{(t-3i)(t+2i)}$ , calcolare la sua trasformata di Fourier  $\hat{f}$ . Utilizzando poi tale risultato, calcolare  $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(t^2+4)(t^2+9)} dt$ . Risulta

$$\hat{f}(\omega) = \frac{\quad}{\quad};$$

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(t^2+4)(t^2+9)} dt = \frac{\quad}{\quad}.$$

5. [7 pt] Risolvere con la  $\mathcal{L}$ -trasformata la seguente equazione integro-differenziale:

$$\begin{cases} X''(t) - 4X(t) * H(t)e^{-3t} = H(t), & t > 0 \\ X(0) = X'(0) = 0. \end{cases}$$

$$X(t) = \frac{\quad}{\quad}.$$

[Si osservi che  $s^3 + 3s^2 - 4 = s^3 - s^2 + 4(s^2 - 1)$ .]

## PARTE B

1. [6 pt] Enunciare il Lemma di Jordan per il semipiano  $\text{Im } z > 0$ .

2. [8 pt] Per la funzione  $f$  dell'esercizio 4 della parte A, indicare le principali proprietà di  $\hat{f}$ , sulla base dei risultati della teoria della Trasformata di Fourier.

3. [7 pt] Data la funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $f(t) = \begin{cases} \frac{\sin(|t|)}{\sqrt[6]{|t|}}, & \text{se } t \in (-1, 1) \setminus \{0\}, \\ \frac{1}{|t|^4}, & \text{se } |t| \geq 1, \end{cases}$

verificare che  $f$  è  $\mathcal{F}$ -trasformabile in un opportuno senso.

4. [7 pt] Si considerino le funzioni  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definite da  $f(t) = e^{-2|t|}$ ,  $g(t) = \frac{1}{16+t^4}$ . In base a risultati noti, determinare le principali proprietà di  $h(t) = (f * g)(t)$ .

5. [6 pt] Enunciare la formula del valore finale e la formula del valore iniziale per la  $\mathcal{L}$ -trasformata, precisando con cura le ipotesi.