METODI MATEMATICI 22/01/2026	Cognome e Nome

PARTE A

1. [6 pt] Calcolare l'integrale
$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos 3x}{2+\cos x}\,dx,$$
utilizzando metodi di Analisi Complessa. $I =$ $\boxed{}$.

2. [7 pt] Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, periodica di periodo 2π, definita da
$$f(t) = \begin{cases} -10t & \text{se } \ -\pi < t < 0, \\ 5(\pi+t) & \text{se } \ 0 \le t \le \pi. \end{cases}$$
(a) Scrivere la Serie di Fourier della f. $S(t) =$ $\boxed{}$

(b) Studiare la convergenza puntuale della serie, precisando con cura il valore della somma della serie nei vari punti. $S(t) =$ $\boxed{}$.

3. [7 pt] Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, definita da $f(t) = \log\left[\dfrac{(t+4i)(t-6i)}{(t-4i)(t+6i)}\right]$.

Calcolare la $\mathcal{F}$-trasformata di f. $\hat{f} =$ $\boxed{}$

[È consigliabile derivare la f per effettuare il calcolo di $\hat{f}$]

4. [7 pt] Date le funzioni f, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definite da $f(t) = e^{-2|t|}$ e $g(t) = \chi_{[-3,3]}(t)$, determinare l'espressione esplicita di $h(t) = (f * g)(t)$.

$h(t) =$ $\boxed{}$.

5. [7 pt] Determinare la successione $\{y_n\}_{n\ge 0}$, soluzione della seguente equazione alle differenze
$$\begin{cases} y_{n+2} - 8y_{n+1} + 12y_n = 6^n, \\ y_o = 0, \ y_1 = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$y_n =$ $\boxed{}$

PARTE B

1. [6 pt] Dare la definizione di z_o, singolarità essenziale della funzione $f : \Omega \backslash \{z_o\} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, olomorfa in $\Omega \backslash \{z_o\}$, fornendo un esempio.

2. [7 pt] Si consideri la funzione f dell'esercizio 3 della parte A: sulla base dei risultati della Teoria della Trasformata di Fourier, indicare le principali proprietà della sua trasformata $\hat{f}$.

3. 7 pt] Enunciare il Teorema della convoluzione per la Trasformata di Fourier.

4. [7 pt] Enunciare il Teorema di inversione per la Trasformata di Laplace, precisando **tutte** le ipotesi.

5. [8 pt] Enunciare le formule di inversione per la $\mathcal{Z}$-trasformata, precisando tutte le ipotesi.