METODI MATEMATICI 18/09/2025	Cognome e Nome

PARTE A

1. [6 pt] Utilizzando metodi di Analisi Complessa, calcolare $I = \mathrm{vp}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2t)}{t(t^2-9)}\,dt$.

   $I =$ $\boxed{}$.

2. [7 pt] Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, periodica di periodo 2π, definita da

$$f(t) = \begin{cases} t+\pi & \text{se } -\pi < t \leq 0, \\ \frac{3}{2}\pi - t & \text{se } 0 < t \leq \pi. \end{cases}$$

   (a) Scrivere la serie di Fourier di f. $S(t) =$ $\boxed{}$.

   (b) Studiare la convergenza puntuale della serie, precisando con cura il valore della somma della serie nei vari punti. $S(t) =$ $\boxed{}$.

3. [6 pt] Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definita da

$$f(t) = -\chi_{[-2,-1)}(t) + \chi_{[-1,0)}(t)(1+2t) + \chi_{[0,1)}(t)(1-2t) - \chi_{(1,2]}(t).$$

   Calcolare la $\mathcal{F}$-trasformata di f; $\hat{f} =$ $\boxed{}$.

4. [8 pt] Calcolare l'espressione esplicita di

$$h(t) = |t|\chi_{[-1,1]}(t) * \chi_{[-1,1]}(t).$$

   $h(t) =$ $\boxed{}$.

5. [7 pt] Utilizzando la $\mathcal{L}$-trasformata, risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} tY'' + 2Y' - 4tY = H(t)t, & t > 0, \\ Y(0) = Y'(0) = 0. \end{cases}$$

   $Y(t) =$ $\boxed{}$.

PARTE B

1. [6 pt] Dare la definizione (precisa) di polo in z_o di una funzione f olomorfa in $\Omega \setminus \{z_o\}$, con Ω aperto di $\mathbb{C}$ e di ordine del polo.

2. [8 pt] Per la funzione f dell'esercizio 3 della parte A, indicare le principali proprietà di $\hat{f}$, sulla base dei risultati della teoria della Trasformata di Fourier.

3. [7 pt] Date le due funzioni $F_1(t) = H(t)t\, e^{t^4}$ e $F_2(t) = H(t)\,\dfrac{1}{(t-3)^3}$, mostrare che entrambe **non** sono $\mathcal{L}$-trasformabili.

4. [5 pt] Per la convoluzione dell'esercizio 4 della parte A, indicare le sue principali proprietà, sulla base dei risultati noti dalla teoria .

5. [8 pt] Enunciare i Teoremi relativi alla convergenza puntuale della serie di Fourier.