METODI MATEMATICI 15/07/2025	Cognome e Nome

PARTE A

1. [6 pt] Utilizzando metodi di Analisi Complessa, calcolare $I = \mathrm{vp}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t}{(t-2)(t^2+4)}\, dt$.

   $I =$ $\boxed{}$.

2. [7 pt] Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, periodica di periodo 2π, definita da

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} + t & \text{se } 0 < t \le \dfrac{\pi}{2}, \\ \dfrac{2}{3}(2\pi - t) & \text{se } \dfrac{\pi}{2} < t \le 2\pi. \end{cases}$$

   (a) Scrivere la serie di Fourier di f. $S(t) =$ $\boxed{}$.

   (b) Studiare la convergenza puntuale della serie, precisando con cura il valore della somma della serie nei vari punti. $S(t) =$ $\boxed{}$.

3. [7 pt] Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, definita da $f(t) = \frac{1}{(t+3i)^2}$.

   (a) Calcolare la $\mathcal{F}$-trasformata di f; $\hat{f} =$ $\boxed{}$.

   (b) Utilizzando i risultati precedenti, calcolare $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(t^2+9)^2}\, dt$. $I =$ $\boxed{}$.

4. [7 pt] Utilizzando la $\mathcal{F}$-trasformata, calcolare l'espressione di

   $h(t) = \frac{1}{t+4i} * \frac{1}{(t+3i)^2}$. $h(t) =$ $\boxed{}$.

5. [7 pt] Determinare la successione $\{f_n\}_{n\ge 0}$, sapendo che la sua $\mathcal{Z}$-trasformata, definita in $|z| > 1$, è $F^*(z) = \left(1 + \frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{2}}$. $f_n =$ $\boxed{}$.

PARTE B

1. [6 pt] Enunciare la I formula di Cauchy per una funzione $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, f olomorfa in Ω aperto.

2. [8 pt] Per la funzione f dell'esercizio 3 della parte A, indicare le principali proprietà di $\hat{f}$, sulla base dei risultati della Teoria della Trasformata di Fourier.

3. [6 pt] Enunciare l'identità di Parseval per la serie di Fourier, indicando le ipotesi sotto le quali essa è valida.

4. [7 pt] Per la funzione h dell'esercizio 4 della parte A, indicare le principali proprietà di h, sulla base dei risultati della Teoria del prodotto di convoluzione.

5. [7 pt] Verificare che per la funzione $F(t) = H(t)\dfrac{1-\cos t}{t^2}e^{-4t^2}$ l'ascissa di convergenza della Trasformata di Laplace è $\lambda_F = -\infty$.