

PARTE A

1. [6 pt] Calcolare il valore dell'integrale improprio

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t-4}{(t^2+2^2)(t-3i)^2(t+3i)} dt,$$

utilizzando metodi di Analisi Complessa. $I =$

2. [7 pt] Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, periodica di periodo 2π , definita da

$$f(t) = \begin{cases} 4(\pi^2 - t^2) & \text{se } -\pi < t < 0, \\ 8(\pi - t)^2 & \text{se } 0 \leq t \leq \pi. \end{cases}$$

(a) Scrivere la Serie di Fourier della f . $S(t) =$

(b) Studiare la convergenza puntuale della serie, precisando con cura il valore della somma della serie nei vari punti e giustificando il risultato.

$S(t) =$

3. [7 pt] Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definita da $f(t) = t \cos^2\left(\frac{\pi}{5}t\right) \chi_{[-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}]}(t)$.

Calcolare la $\mathcal{F}$ -trasformata di f . $\hat{f} =$

4. [7 pt] Utilizzando la $\mathcal{L}$ -trasformata, calcolare il valore del seguente integrale improprio

$$I = \int_6^{+\infty} e^{-4t} \left[\frac{1}{\sqrt{t-6}} - (t-6)^2 \right] dt.$$

$I =$

5. [7 pt] Determinare la successione $\{y_n\}_{n \geq 0}$, soluzione della seguente equazione alle differenze

$$\begin{cases} y_{n+2} - 12y_{n+1} + 32y_n = n2^n, \\ y_0 = 1, y_1 = 0. \end{cases}$$

$y_n =$

PARTE B

1. [6 pt] Enunciare le condizioni di Cauchy-Riemann, precisando con cura tutte le ipotesi.

2. [8 pt] Si consideri la funzione f dell'esercizio 3 della parte A: sulla base dei risultati della Teoria della $\mathcal{F}$ -Trasformata, indicare le principali proprietà della sua trasformata $\hat{f}$.

3. [7 pt] Enunciare il legame tra regolarità di una funzione periodica e velocità di annullamento dei coefficienti del suo sviluppo in serie di Fourier.

4. [7 pt] Enunciare i Teoremi del valore finale e del valore iniziale per la Trasformata di Laplace, precisando **tutte** le ipotesi.

5. [7 pt] Date $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definite da $f(t) = e^{-|t|}$, $g(t) = \frac{1}{1+|t|^{\frac{3}{2}}}$, $h(t) = \frac{\sin^2(\pi t)}{t^2}$, giustificare **con cura** perché $(f * g) * h = f * (g * h)$.