METODI MATEMATICI 04/09/2025	Cognome e Nome

PARTE A

1. [6 pt] Utilizzando metodi di Analisi Complessa, calcolare $I = \mathrm{vp}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-5it}}{t(t^2+4)}\,dt$.

   $I =$ ____________.

2. [7 pt] Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, periodica di periodo 2π, definita da

$$f(t) = \begin{cases} 2(t+\pi) & \text{se } -\pi < t \le 0, \\ \pi & \text{se } 0 \le t \le \pi. \end{cases}$$

   (a) Scrivere la serie di Fourier di f. $S(t) =$ ____________.

   (b) Studiare la convergenza puntuale della serie, precisando con cura il valore della somma della serie nei vari punti. $S(t) =$ ____________.

3. [6 pt] Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definita da

$$f(t) = -\chi_{[-2\pi,-\pi)}(t) + \chi_{[-\pi,\pi]}(t)\cos\left(\frac{t}{2}\right) - \chi_{(\pi,2\pi]}(t).$$

   Calcolare la $\mathcal{F}$-trasformata di f; $\hat{f} =$ ____________.

4. [7 pt] Utilizzando la $\mathcal{L}$-trasformata, risolvere la seguente equazione integro-differenziale:

$$\begin{cases} -4Y * Y' + Y' * Y'' = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^t \sinh(2\tau)\,d\tau, \quad t > 0 \\ Y(0) = Y'(0) = 0. \end{cases}$$

   . $Y(t) =$ ____________.

5. [8 pt] Utilizzando la scomposizione in fratti semplici, oppure le formule di inversione, determinare la successione $\{f_n\}_{n\ge 0}$, sapendo che la sua $\mathcal{Z}$-trasformata, definita in $|z| > 3$, è $F^*(z) = \dfrac{z(z-1)}{(z^2+4)(z^2+9)}$.

   $f_n =$ ____________.

PARTE B

1. [6 pt] Scrivere le condizioni di Cauchy-Riemann per l'olomorfimso di una funzione f, precisando con attenzione tutte le ipotesi.

2. [7 pt] Si consideri la funzione f dell'esercizio 3 della parte A: sulla base dei risultati della Teoria della Trasformata di Fourier, indicare le principali proprietà della sua trasformata $\hat{f}$.

3. [8 pt] Enunciare il Teorema della convoluzione per la Trasformata di Fourier.

4. [6 pt] Enunciare il Teorema di inversione della Trasformata di Laplace.

5. [7 pt] Indicare i principali risultati noti relativi alla inversione della Trasformata $\mathcal{Z}$.