METODI MATEMATICI

01/04/2026

Cognome e Nome

PARTE A

1. [6 pt] Calcolare l'integrale

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+6)(x^2+8)}\, dx,$$

utilizzando metodi di Analisi Complessa. $I =$ ______ .

2. [7 pt] Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, periodica di periodo 2π, **pari**, definita da

$$f(t) = \begin{cases} \pi, & \text{se } \ 0 \le t < \dfrac{\pi}{2}, \\ \pi - 2t, & \text{se } \ \dfrac{\pi}{2} \le t \le \pi. \end{cases}$$

(a) Scrivere la Serie di Fourier della f. $S(t) =$ ______

(b) Studiare la convergenza puntuale della serie, precisando con cura il valore della somma della serie nei vari punti. $S(t) =$ ______ .

3. [7 pt] Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, **pari**, definita da $f(t) = \begin{cases} t, & \text{se } \ 0 \le t \le 2, \\ 2, & \text{se } \ 2 < t \le 4, \\ 0, & \text{se } \ t > 4. \end{cases}$

Calcolare la $\mathcal{F}$-trasformata di f. $\hat{f} =$ ______

4. [7 pt] Determinare la successione $\{y_n\}_{n\ge 0}$, soluzione della seguente equazione alle differenze

$$\begin{cases} y_{n+2} - 9y_{n+1} + 20y_n = n, \\ y_o = 0, \ \ y_1 = 1. \end{cases}$$

$y_n =$ ______

5. [7 pt] Utilizzando la $\mathcal{L}$-trasformata, risolvere il seguente problema di Cauchy in avanti:

$$\begin{cases} X'' - 9X' + 20X = H(t)te^{-t}, \\ X(0) = 1, \quad X'(0) = 1. \end{cases}$$

$I =$ ______

PARTE B

1. [6 pt] Enunciare la I formula di Cauchy per $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, precisando **tutte** le ipotesi.

2. [7 pt] Si consideri la funzione f dell'esercizio 3 della parte A: sulla base dei risultati della Teoria della Trasformata di Fourier, indicare le principali proprietà della sua trasformata $\hat{f}$.

3. [7 pt] Enunciare il Teorema di inversione per la Trasformata di Fourier in $L^1(\mathbb{R})$.

4. [7 pt] Enunciare la formula di inversione per la $\mathcal{L}$-Trasformata.

5. [7 pt] Enunciare i due teoremi di convergenza puntuale delle serie di Fourier.