APPELLO DI COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA DEL 23 GIUGNO 2021

COGNOME e NOME NUMERO DI MATRICOLA

1) Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-periodica, definita da

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t \in [-\pi, 0], \\ t & t \in (0, \pi). \end{cases}$$

a) Disegnare il grafico della funzione e verificare che la funzione è sviluppabile in serie di Fourier.
b) Scrivere tale sviluppo in forma trigonometrica.
c) Studiare le diverse forme di convergenza della serie alla funzione.
d) Utilizzando i risultati della convergenza puntuale della serie di Fourier, determinare la somma della serie numerica $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$.
e) Determinare scrivere l'espressione esplicita della serie numerica $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)$ e con l'identità di Parseval calcolarne la somma.

2) Determinare l'integrale particolare, soluzione del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} \underline{z}' = \mathbb{A}\underline{z}, \\ z(0) = \underline{z}_o, \end{cases} \qquad \text{dove} \quad \mathbb{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \underline{z}_o = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3) Data l'equazione differenziale $y' = \dfrac{1}{y}\sqrt{y^2 - 1}$, indicare il più grande aperto $D \subset \mathbb{R}^2$ in cui si applica il Teorema di esistenza ed unicità in piccolo. Determinare, poi, una soluzione dell'equazione differenziale che passa per il punto $(0, 1)$. È unica?

4) Verificare in base alla teoria che il sistema

$$\begin{cases} e^x + \sin z + \ln(1+y) - 1 = 0, \\ \cos y - e^{xz} + 2x + 5z = 0, \end{cases}$$

è univocamente risolubile rispetto a (y, z) in un intorno del punto $O = (0, 0, 0)$. Scrivere, quindi, l'espressione della retta tangente nell'origine alla curva Γ implicitamente definita dal sistema.

5) Determinare il massimo ed il minimo assoluti della funzione $f(x, y, z) = x^2 - y^2 + z$ quando (x, y, z) è vincolato ad appartenere alla curva

$$\Gamma : \begin{cases} z - y^2 = x, \\ y - x^2 = z. \end{cases}$$

Nota: Può essere utile parametrizzare la curva Γ, eliminando z dal sistema che la esprime.