APPELLO DI COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA DEL 22 MARZO 2019

COGNOME e NOME NUMERO DI MATRICOLA

1) Si consideri la funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, 2π-periodica, definita da

$$f(t) = \begin{cases} 2t, & \text{se } t \in [-\pi, 0), \\ t, & \text{se } t \in [0, \pi). \end{cases} .$$

a) Disegnare il grafico della funzione.
b) Verificare che la funzione è sviluppabile in serie di Fourier.
c) Scrivere tale sviluppo in forma trigonometrica.
d) Studiare la convergenza della serie alla funzione.
e) Utilizzando l'identità di Parseval, e sapendo che $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, calcolare la somma della serie numerica $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$.
f) Utilizzando i risultati relativi alla convergenza puntuale, calcolare la somma della serie numerica $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$.

2) Determinare la soluzione del Problema di Cauchy per il sistema lineare omogeneo

$$\underline{z}' = \mathbb{A}\underline{z}, \qquad \underline{z}(0) = \underline{z}_o$$

dove

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}, \qquad \underline{z}_o = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3) Sia $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definita da $f(x, y) = 2x^4 + y^2$. Determinare tutti i punti critici della f e classificarli. Determinare poi il massimo ed il minimo assoluti di f nel dominio chiuso e limitato $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \ -\sqrt{1 - x^2} \le y \le 1 - x^2\}$.

4) Definito il funzionale

$$\Phi(y) = \int_0^{\pi} \left[(y'(x))^2 - 4(y(x))^2 + y(x)\cos x \right] dx,$$

determinare le sue linee estremali $y \in C^2([0, \pi])$ soddisfacenti la condizione $y(\pi) = 1$.