APPELLO DI COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA DEL 19 MARZO 2021

COGNOME e NOME NUMERO DI MATRICOLA

1) Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-periodica, **pari**, definita da $f(t) = t$ se $t \in [0, \pi]$.

a) Disegnare il grafico della funzione e verificare che la funzione è sviluppabile in serie di Fourier.

b) Scrivere tale sviluppo in forma trigonometrica.

c) Studiare le diverse forme di convergenza della serie alla funzione.

d) Utilizzando i risultati della convergenza puntuale della serie di Fourier, determinare la somma della serie numerica $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$.

e) Con l'identità di Parseval, determinare la somma della serie numerica $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$.

2) Determinare l'integrale particolare, soluzione del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y}{x} + \cos^2\left(\dfrac{y}{x}\right), \\ y(1) = \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Nota: Effettuare la sostituzione $t = \frac{y}{x}$.

3) Determinare l'integrale generale del sistema lineare completo

$$\underline{y}' = \mathbb{A}\underline{y} + \underline{b},$$

dove

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ -8 \end{bmatrix}.$$

Nota: Può essere utile osservare che un integrale particolare del sistema completo è dato da un opportuno vettore costante.

4) Verificare in base alla teoria che l'equazione

$$\ln(x + y + z) + \sinh(yz) = 0$$

è univocamente risolubile rispetto a z in un intorno del punto $P(0, 0, 1)$. Calcolare, quindi, l'espressione del Polinomio di McLaurin (ossia centrato in $(0, 0)$) di ordine due della funzione $z = g(x, y)$ implicitamente definita.

5) Determinare il massimo della funzione $f(x, y, z) = xyz$ quando (x, y, z) è vincolato ad appartenere all'ellissoide di equazione

$$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1.$$