APPELLO DI COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA DEL 16 SETTEMBRE 2021

COGNOME e NOME   NUMERO DI MATRICOLA

1) Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-periodica, **pari**, definita da

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & t \in (0, \dfrac{\pi}{2}], \\ \pi - t, & t \in (\dfrac{\pi}{2}, \pi]. \end{cases}$$

a) Disegnare il grafico di f e verificare che f è sviluppabile in serie di Fourier.
b) Scrivere tale sviluppo in forma trigonometrica.
c) Studiare le diverse forme di convergenza della serie alla funzione.
d) Utilizzando i risultati della convergenza puntuale della serie di Fourier, determinare la somma della serie numerica che si ottiene in corrispondenza di $t = 0$.
e) Determinare la somma della serie numerica $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$.

2) Determinare l'integrale particolare, soluzione del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} \underline{z}' = \mathbb{A}\underline{z}, \\ \underline{z}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \end{cases} \qquad \text{dove} \quad \mathbb{A} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

3) Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = \frac{y}{x} + \left(1 + \frac{y}{x}\right) \ln\left(1 + \frac{y}{x}\right).$$

a) Determinare il più grande aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ in cui si può applicare il Teorema di esistenza ed unicità in piccolo.
b) Determinare l'integrale generale dell'equazione [**Si consiglia di porre $\frac{y}{x} = t$, da cui si ricava $y' = xt' + t$**].
c) Determinare l'integrale particolare passante per il punto $P(1, 0)$.

4) Verificare che l'equazione

$$\ln(x + y + z) + \sinh(yz) = 0,$$

è univocamente risolubile rispetto a z in un intorno del punto $P(0, 0, 1)$. Scrivere, quindi, il Polinomio di Mc-Laurin di ordine due della funzione $z = g(x, y)$ implicitamente definita.

5) Determinare il massimo ed il minimo assoluti della funzione

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + x + 1)$$

nell'insieme $K = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \leq 0, \ y \geq 0, \ 4x^2 + \dfrac{y^2}{4} \leq 1\right\}$, giustificando perchè esistono.