APPELLO DI COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA DEL 15 GIUGNO 2012

COGNOME e NOME NUMERO DI MATRICOLA

1) Sia $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definita da
$$f(x, y) = x^3 - y^2.$$
Determinare tutti i punti critici della funzione f e classificarli.
Determinare il massimo e il minimo assoluti della funzione f nel triangolo <u>chiuso</u> T, che ha i vertici nei punti $O(0, 0)$, $A(2, 0)$, $B(2, 2)$.

2) Si consideri l'equazione differenziale
$$y'' + 4y' + 8y = x + \sin(3x).$$
Determinare l'equazione dell'integrale generale e quindi l'equazione dell'integrale particolare che soddisfa la condizione iniziale $y(0) = y'(0) = 0$.

3) Si consideri la funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, 2π-periodica, definita da
$$f(t) = \begin{cases} t + \pi, & t \in [-\pi, 0[\\ -\pi, & t \in [0, \pi[. \end{cases}$$

a) Disegnare il grafico della funzione.
b) Verificare che f è sviluppabile in serie di Fourier.
c) Scrivere tale sviluppo.
d) Studiare la convergenza <u>puntuale</u> della serie alla funzione.
e) Utilizzare i risultati del punto precedente per calcolare la somma della serie numerica $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$.

4) Determinare l'estremale $y \in C^2([0, 2])$ del funzionale
$$\Phi(y) = \int_0^1 \left([y'(x)]^2 + [y(x)]^2\right) dx,$$
passante per i punti $(0, 0)$ e $(1, 1)$.