

1) Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π -periodica, definita da

$$f(t) = \begin{cases} t & t \in (-\pi, 0], \\ 2t & t \in (0, \pi]. \end{cases}$$

- Disegnare il grafico di f e verificare che è sviluppabile in serie di Fourier.
- Scrivere tale sviluppo in forma trigonometrica.
- Studiare le diverse forme di convergenza della serie alla funzione.
- Utilizzando i risultati della convergenza puntuale della serie di Fourier, determinare la somma della serie numerica che si ottiene in corrispondenza di $t = \pi$.
- Determinare scrivere l'espressione esplicita della serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$ e con l'identità di Parseval calcolarne la somma.

2) Determinare l'integrale generale del sistema lineare completo

$$\underline{y}' = \underline{A}\underline{y} + \underline{b} \quad \text{dove} \quad \underline{A} = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} x^{-6}e^{-3x} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3) Determinare l'integrale particolare, soluzione del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' = 2y' \cotan(2x) + 4 \sin^2(2x), & x \in (\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}), \\ y(\frac{\pi}{4}) = 1, & y'(\frac{\pi}{4}) = -3. \end{cases}$$

Suggerimento: Si consiglia di porre inizialmente $y' = u$ ed integrare l'equazione differenziale lineare del I ordine così ottenuta.

4) Per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ scrivere l'equazione del piano tangente nel punto $P(1, -1, 1)$ alla superficie definita implicitamente dall'equazione

$$(1 + x^2 + y^2)z + z^3 + \lambda x^2 - \lambda y^2 + 4xy = 0,$$

in un opportuno intorno di P , dopo aver verificato che l'equazione è univocamente risolvibile rispetto a z . Determinare quindi λ , affinché il piano tangente così ottenuto risulti ortogonale al piano $2x + 4y - z - 3 = 0$.

5) Determinare il massimo ed il minimo assoluti della funzione $f(x, y, z) = (x^2 - y^2)^2 + 2z^2$ nell'insieme compatto $E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R} : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{9} \leq 1 \right\}$.