

1) Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π -periodica, **pari**, definita da

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{se } t \in [0, \frac{\pi}{2}), \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } t \in [\frac{\pi}{2}, \pi]. \end{cases}$$

- Disegnare il grafico della funzione e verificare che la funzione è sviluppabile in serie di Fourier
- Scrivere tale sviluppo in forma trigonometrica.
- Studiare le diverse forme di convergenza della serie alla funzione.
- Utilizzando la convergenza puntuale della serie di Fourier in $t = \frac{\pi}{2}$, determinare la somma della serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{(2k+1)^2}$.

2) Determinare l'integrale generale del sistema lineare completo

$$\underline{y}' = \mathbb{A}\underline{y} + \underline{b},$$

dove

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ xe^{3x} \end{bmatrix}.$$

3) Sia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - x + 2y + 2z$. Giustificando i passaggi, determinare il massimo ed il minimo assoluti della f vincolati a stare sulla superficie $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 - 25 = 0\}$.

4) Verificare in base alla teoria che l'equazione

$$y - x \ln \left(\frac{x-y}{x+y} \right) + x \ln(3\sqrt{e}) = 0$$

è univocamente risolubile rispetto ad entrambe le variabili in un intorno del punto $P(2, -1)$. Scrivere, poi, l'equazione della retta tangente nel punto P alla linea Γ implicitamente definita dall'equazione.

5) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'' + 12y' + 32y = \frac{1}{1 + 10e^{4x}}.$$

Giustificare in base alla teoria perchè l'integrale generale è definito su tutto $\mathbb{R}$ ed è di classe C^∞ ; determinare, quindi, l'espressione di tale integrale generale.