APPELLO DI COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA DEL 3 MARZO 2021

COGNOME e NOME NUMERO DI MATRICOLA

1) Si consideri la funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 2π-periodica, definita da

$$f(t)=\pi^2-t^2 \quad \text{se} \quad t\in\big[-\pi,\pi\big].$$

a) Disegnare il grafico della funzione e verificare che la funzione è sviluppabile in serie di Fourier
b) Scrivere tale sviluppo in forma trigonometrica.
c) Studiare le diverse forme di convergenza della serie alla funzione.
d) Utilizzando i risultati di convergenza puntuale della serie di Fourier, determinare la somma delle serie numeriche $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$.
e) Utilizzando l'identità di Parseval, determinare la somma della serie numerica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$.

2) Determinare l'integrale particolare soluzione del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'''-4y'=16x,\\ y(0)=5,\ y'(0)=0,\ y''(0)=\alpha, \end{cases}$$

dove α è un parametro reale. Determinare, inoltre, gli eventuali valori di α per i quali tale problema ha una soluzione polinomiale.

3) Sia $\Gamma\subset\mathbb{R}^3$ la curva regolare definita dal sistema

$$\begin{cases} x^2+y^2-z^2=1,\\ x-y-2z=0. \end{cases}$$

Giustificando i passaggi, determinare i punti di Γ aventi massima e minima distanza dall'origine.

4) Verificare in base alla teoria che l'equazione

$$e^{3xy}+5x^2+2y-1=0$$

è univocamente risolubile rispetto a y in un intorno del punto $O(0,0)$. Tracciare, poi, un grafico qualitativo della linea Γ implicitamente definita dall'equazione.

5) Definito il funzionale

$$\Phi(y)=\int_{-1}^{1}\big[(y'(x))^2-1\big]^2\,dx,$$

determinare la sua linea estremale $y\in C^2([-1,1])$ soddisfacente le condizioni ai limiti $y(-1)=-1$, $y(1)=1$. Verificare, quindi, che si tratta di una estremante di minimo.