4. Sistemi ed equazioni lineari a coefficienti costanti e di Eulero

Esaminiamo il caso dei sistemi e delle equazioni lineari a coefficienti costanti, per i quali la determinazione di N integrali particolari linearmente indipendenti può essere fatta in maniera esplicita. Alla fine della sezione considereremo brevemente un'altra classe di sistemi omogenei, per cui il calcolo dell'integrale generale è possibile.

È immediato constatare che $\forall (x_0, y_0) \in \mathbf{R}^{N+1}$ la soluzione del sistema omogeneo $\underline{z}' = \mathbb{A}\underline{z}$ esiste, è unica, è definita su tutta la retta ed è di classe C^∞ (è addirittura analitica intera, ossia sviluppabile in serie di potenze con raggio di convergenza infinito).

Abbiamo poi il seguente fondamentale

Teorema 1. - *Dato $\underline{z}' = \mathbb{A}\underline{z}$ con $\mathbb{A}$ costante, valgono le seguenti proprietà:*

a) $\forall \underline{v}_0 \in \mathbf{R}^N$ il vettore $\underline{w} = e^{x\mathbb{A}}\underline{v}_0$ è soluzione del sistema;

b) le colonne della matrice $e^{x\mathbb{A}}$ formano un sistema fondamentale di soluzioni;

c) Il problema di Cauchy $\underline{z}(x_0) = \underline{v}_0$ ammette l'unica soluzione $\underline{z} = e^{(x-x_0)\mathbb{A}}\underline{v}_0$.

Dimostrazione. - Ricordando che

$$\frac{d}{dx} e^{x\mathbb{A}} = \mathbb{A}\, e^{x\mathbb{A}},$$

la verifica di a) è immediata. Per quanto riguarda b), scegliendo, $\underline{v}_0 = \underline{e}_1$, $\underline{v}_0 = \underline{e}_2$, ..., $\underline{v}_0 = \underline{e}_N$, il vettore $e^{x\mathbb{A}}\underline{v}_0$ fornisce, di volta in volta, la prima, la seconda, ..., l'ennesima colonna di $e^{x\mathbb{A}}$. Queste colonne sono linearmente indipendenti perchè $\forall\, x \in \mathbf{R}$ $\det e^{x\mathbb{A}} \neq 0$. Infine, ricordando che $e^{0\mathbb{A}} = \mathbb{I}_N$, verifichiamo c) ▪.

Osservazione. - È chiaro che in questa situazione $\mathbb{Z}(x; x_0) = e^{(x-x_0)\mathbb{A}}$ ▪.

A questo punto, il problema si riduce al calcolo esplicito della matrice esponenziale. Vediamo qui di seguito le situazioni che si possono presentare, con alcune osservazioni di carattere generale.

Caso A - $\mathbb{A}$ è diagonale, ossia $\mathbb{A} = \mathrm{diag}\,[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N]$. Abbiamo già visto che

$$e^{x\mathbb{A}} = \mathrm{diag}\,[e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}].$$

Dunque, con riferimento alla condizione iniziale indicata nel Teorema 1,

$$\underline{z} = \mathrm{diag}\,[e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}]\underline{v}_0.$$

Osservazione. - Se $\mathbb{A}$ è diagonale pur non essendo costante, possiamo concludere ugualmente. Infatti in tal caso le equazioni sono in effetti disaccoppiate e ciascuna può essere risolta indipendentemente dalle altre ▪.

Caso B - $\mathbb{A}$ è triangolare superiore o inferiore. In tal caso, anzichè calcolare $e^{x\mathbb{A}}$, si procede più semplicemente con il metodo di riduzione, come si vede dall'esempio seguente

$$\begin{cases} z_1' &= 2z_1 + z_2 + z_3 \\ z_2' &= z_2 + \frac{1}{2}z_3 \\ z_3' &= -z_3 \end{cases}$$

Si ricava $z_3 = z_3(x)$, si sostituisce nella seconda equazione, che è lineare e completa, si ricava $z_2 = z_2(x)$ e si sostituisce analogamente nella prima per determinare $z_1(x)$.

Osservazione. - Ancora una volta, questo metodo si applica anche al caso dei coefficienti non costanti ■.

Caso C - $\mathbb{A}$ è completa ed ha N autovalori distinti (reali o complessi coniugati). In corrispondenza abbiamo N autovettori $\underline{h}_i$. Posto

$$\mathbb{S} = [\underline{h}_1|\underline{h}_2|\dots|\underline{h}_N],$$

risulta

$$\tilde{\mathbb{A}} = \mathbb{S}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{S} = \mathrm{diag}\,[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N],$$

$$e^{x\tilde{\mathbb{A}}} = \mathrm{diag}\,[e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_N x}],$$

$$e^{x\mathbb{A}} = \mathbb{S}e^{x\tilde{\mathbb{A}}}\mathbb{S}^{-1}.$$

Dunque, per ogni $\underline{v}_0 \in \mathbf{R}^N$, $e^{x\mathbb{A}}\underline{v}_0 = \mathbb{S}e^{x\tilde{\mathbb{A}}}\mathbb{S}^{-1}\underline{v}_0$ è soluzione. Poichè $\underline{v}_0$ è arbitrario, anche $\mathbb{S}^{-1}\underline{v}_0$ è arbitrario e, dunque, possiamo sempre scegliere $\underline{v}_0$ in modo tale che $\mathbb{S}^{-1}\underline{v}_0 = \underline{e}_i$ con $i = 1, \dots, N$.

Quindi $\underline{z}_i = \mathbb{S}e^{x\tilde{\mathbb{A}}}\underline{e}_i$ è soluzione e svolgendo i calcoli abbiamo

$$\underline{z}_i = \mathbb{S}e^{x\tilde{\mathbb{A}}}\underline{e}_i = [\underline{h}_1|\underline{h}_2|\dots|\underline{h}_N]\mathrm{diag}\,[e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_N x}]\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \end{bmatrix} =$$

$$= [\underline{h}_1|\underline{h}_2|\dots|\underline{h}_N]\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ e^{\lambda_i x} \\ \vdots \end{bmatrix} = e^{\lambda_i x}\underline{h}_i.$$

Un sistema fondamentale di soluzioni è allora dato da

$$\underline{z}_1 = e^{\lambda_1 x}\underline{h}_1, \quad \underline{z}_2 = e^{\lambda_2 x}\underline{h}_2, \quad \dots, \quad \underline{z}_N = e^{\lambda_N x}\underline{h}_N.$$

Abbiamo poi

$$\mathbb{Z}(x) = [\underline{z}_1|\underline{z}_2|\dots|\underline{z}_N] = [e^{\lambda_1 x}\underline{h}_1|e^{\lambda_2 x}\underline{h}_2|\dots|e^{\lambda_N x}\underline{h}_N],$$

da cui

$$W(x) = e^{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_N)x}\det\,[\underline{h}_1|\underline{h}_2|\dots|\underline{h}_N] = e^{(\mathrm{tr}\,\mathbb{A})x}\det\mathbb{S}$$

e questo risultato non è che un caso particolare del Teorema di Liouville visto nella sezione precedente.

Poichè $\mathbb{A}$ è reale, gli autovalori sono reali oppure complessi coniugati. In generale, dunque, avremo M autovalori reali e $2P$ autovalori complessi coniugati

$$\lambda_1, \dots, \lambda_M \in \mathbf{R},$$

$$\mu_1,\ \overline{\mu_1},\ \mu_2,\ \overline{\mu_2}, \ldots, \mu_P,\ \overline{\mu_P} \in \mathbf{C}$$

con la condizione che $M + 2P = N$. Se indichiamo con $\underline{h}_i$ gli autovettori corrispondenti agli autovalori reali e con $\underline{w}_i$ gli autovettori corrispondenti agli autovalori complessi μ_i, allora $\overline{\underline{w}_i}$ sono gli autovettori corrispondenti agli autovalori $\overline{\mu_i}$. Infatti, tenendo conto che $\mathbb{A}$ è reale, abbiamo

$$\mathbb{A}\underline{w}_i = \mu_i \underline{w}_i \quad \Rightarrow \quad \overline{\mathbb{A}\underline{w}_i} = \overline{\mu_i \underline{w}_i} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{A}\overline{\underline{w}_i} = \overline{\mu_i}\, \overline{\underline{w}_i}.$$

Dunque, per quanto detto sopra, un sistema fondamentale è dato da

$$\underline{z}_1 = e^{\mu_1 x}\underline{w}_1, \quad \underline{z}_2 = e^{\overline{\mu_1} x}\overline{\underline{w}_1}$$

dove $\mu_1 = \alpha + i\beta$, $\overline{\mu_1} = \alpha - i\beta$. Inoltre $\underline{w}_1 = \underline{u}_1 + i\underline{v}_1$, $\overline{\underline{w}_1} = \underline{u}_1 - i\underline{v}_1$. In definitiva, proprio perchè a due vettori posso sostituire due loro combinazioni lineari, anzichè considerare i vettori

$$\underline{z}_1 = e^{\alpha x}\, e^{i\beta x}(\underline{u}_1 + i\underline{v}_1) = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)(\underline{u}_1 + i\underline{v}_1),$$
$$\underline{z}_2 = e^{\alpha x}\, e^{-i\beta x}(\underline{u}_1 - i\underline{v}_1) = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x)(\underline{u}_1 - i\underline{v}_1),$$

posso trattare con

$$\underline{z}_1^* = \mathrm{Re}(e^{\mu_1 x}\underline{w}_1) = \frac{1}{2}(\underline{z}_1 + \underline{z}_2),$$
$$\underline{z}_2^* = \mathrm{Im}(e^{\mu_1 x}\underline{w}_1) = \frac{1}{2i}(\underline{z}_1 - \underline{z}_2)$$

e poi ripetere tutto il ragionamento precedente.

Esempio. - Consideriamo il sistema

$$\underline{z}' = \mathbb{A}\underline{z} \qquad \text{con} \qquad \mathbb{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Abbiamo $\det(\lambda\mathbb{I}_2 - \mathbb{A}) = \lambda^2 + 1$. In corrispondenza degli autovalori $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$ cerchiamo gli autovettori. Abbiamo

$$\begin{bmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} i\alpha - \beta = 0 \\ \alpha + i\beta = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \alpha + i\beta = 0,$$

$$\underline{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \qquad \underline{w}_2 = \overline{\underline{w}_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}.$$

Perciò

$$\underline{z}_1^* = \mathrm{Re}\,(e^{\mu_1 x}\underline{w}_1) = \mathrm{Re}\begin{bmatrix} e^{ix} \\ ie^{ix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{bmatrix},$$
$$\underline{z}_2^* = \mathrm{Im}\,(e^{\mu_1 x}\underline{w}_1) = \mathrm{Im}\begin{bmatrix} e^{ix} \\ ie^{ix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{bmatrix}$$

ed anche

$$\mathbb{Z}(x) = \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix} \quad \blacksquare.$$

D - $\mathbb{A}$ è completa ma gli autovalori (sempre reali o complessi coniugati dal momento che $\mathbb{A}$ è reale) non sono tutti distinti. È questo il caso più difficile in cui il calcolo della matrice esponenziale è più complesso. Allo scopo è più comodo trattare prima il caso delle equazioni.

Considerata l'equazione lineare a coefficienti costanti

$$a_0 z^{(N)} + a_1 z^{(N-1)} + \ldots + a_N z = 0$$

come già visto il sistema equivalente è

$$\begin{cases} z' = & & u & & & \\ u' = & & & v & & \\ v' = & & & & w & \\ \vdots & & & & & \\ p' = & -\frac{a_N}{a_0} z & -\frac{a_{N-1}}{a_0} u & \ldots & & -\frac{a_1}{a_0} p \end{cases}$$

con

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \\ -\frac{a_N}{a_0} & -\frac{a_{N-1}}{a_0} & \ldots & & -\frac{a_1}{a_0} \end{bmatrix}.$$

Perciò

$$\det(\lambda \mathbb{I}_N - \mathbb{A}) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \\ \frac{a_N}{a_0} & \frac{a_{N-1}}{a_0} & \ldots & & \lambda + \frac{a_1}{a_0} \end{bmatrix} = a_0 \lambda^N + a_1 \lambda^{N-1} + \ldots + a_N$$

che è proprio l'equazione che si ottiene sostituendo a $z^{(k)}$ la variabile λ elevata al corrispondente ordine di derivazione. Si parla di polinomio caratteristico ed equazione caratteristica. Se l'equazione caratteristica ha N soluzioni distinte, quanto visto prima per i sistemi lineari suggerisce che N soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione sono date da

$$z_1 = e^{\lambda_1 x},\ z_2 = e^{\lambda_2 x},\ \ldots,\ z_N = e^{\lambda_N x}.$$

Infatti

$$\mathbb{Z}(x) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & \ldots & e^{\lambda_N x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & \ldots & \lambda_N e^{\lambda_N x} \\ \vdots & & \ldots & \\ \lambda_1^{N-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{N-1} e^{\lambda_2 x} & \ldots & \lambda_N^{N-1} e^{\lambda_N x} \end{bmatrix}$$

da cui

$$W(x) = e^{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_N)x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_N \\ \vdots & & \ldots & \\ \lambda_1^{N-1} & \lambda_2^{N-1} & \ldots & \lambda_N^{N-1} \end{vmatrix}$$

e, come è noto, tale determinante (determinante di Vandermonde) è nullo se e solo se i numeri λ_1, λ_2, ..., λ_N non sono tutti diversi fra loro.

Come già osservato nel caso dei sistemi, se μ_1 e μ_2 sono due soluzioni complesse coniugate, anzichè considerare $z_1 = e^{\mu_1 x}$ e $z_2 = e^{\mu_2 x} = e^{\overline{\mu_1} x}$ possiamo lavorare con

$$z_1^* = e^{\alpha x}\cos\beta x = \frac{z_1 + z_2}{2}, \qquad z_2^* = e^{\alpha x}\sin\beta x = \frac{z_1 - z_2}{2i}.$$

Supponiamo ora che una radice reale sia doppia, cioè risulti $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Oltre a $z_1 = e^{\lambda x}$, occorre determinare una seconda soluzione linearmente indipendente. Se λ_1 e λ_2 sono distinte, sono soluzioni linearmente indipendenti le due funzioni

$$w_1 = e^{\lambda_1 x}, \qquad w_2 = \frac{e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_2 x}}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Se, dunque, $\lambda_1 \to \lambda_2$ abbiamo

$$\lim_{\lambda_2 \to \lambda_1} w_2(x, \lambda) = x\, e^{\lambda_1 x}$$

e sorge spontanea l'idea che due soluzioni linearmente indipendenti siano proprio $z_1 = e^{\lambda x}$ e $z_2 = xe^{\lambda x}$. Considerazioni analoghe inducono a pensare che se λ è soluzione di molteplicità M dell'equazione caratteristica, le corrispondenti soluzioni sono

$$z_1 = e^{\lambda x}, \quad z_2 = xe^{\lambda x}, \quad \ldots, \quad z_M = x^{M-1}e^{\lambda x}.$$

Le osservazioni precedenti sono raccolte nel presente teorema, di cui omettiamo la dimostrazione.

Teorema 2. - *Supponiamo che l'equazione caratteristica abbia le radici*
λ_1 *con molteplicità* M_1,
λ_2 *con molteplicità* M_2,
...
λ_r *con molteplicità* M_r,
con $M_1 + M_2 + \ldots + M_r = N$. *Allora un sistema fondamentale di soluzioni per l'equazione è dato da*

$$\begin{aligned} &e^{\lambda_1 x}, \quad xe^{\lambda_1 x}, \quad \ldots, \quad x^{M_1-1}e^{\lambda_1 x}, \\ &e^{\lambda_2 x}, \quad xe^{\lambda_2 x}, \quad \ldots, \quad x^{M_2-1}e^{\lambda_2 x}, \\ &\qquad\qquad \ldots \end{aligned}$$

$$e^{\lambda_r x}, \quad xe^{\lambda_r x}, \quad \ldots, \quad x^{M_r-1}e^{\lambda_r x} \quad \blacksquare.$$

Osservazione. - Nel caso di radici complesse coniugate, valgono le considerazioni già viste in precedenza sulla combinazione lineare delle soluzioni $\blacksquare$.

Per concludere il discorso, come già affermato al termine della sezione precedente, nel caso dell'equazione a coefficienti costanti completa, la ricerca di un integrale particolare della stessa può essere enormemente facilitato utilizzando la tabella posta in appendice a questa sezione.

Possiamo ora tornare ai sistemi. Se gli autovalori di $\mathbb{A}$ sono λ_1, λ_2, ..., λ_r ciascuno rispettivamente di molteplicità M_1, M_2, ..., M_r, l'integrale generale ha la forma

$$\underline{z} = \sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{M_j} \underline{c}_{ij}\, x^{i-1}e^{\lambda_j x}$$

dove i termini $\underline{c}_{ij}$ sono opportuni vettori che dipendono <u>complessivamente</u> da N costanti arbitrarie. Anzichè dare l'espressione generale dei $\underline{c}_{ij}$ (cosa che sarebbe possibile ma niente affatto banale), illustriamo il procedimento generale che occorre seguire con un esempio. Consideriamo, dunque, il sistema

$$\begin{cases} z_1' = \ \ z_1 + z_2 \\ z_2' = \ \ z_3 \\ z_3' = -z_1 - z_2 + 3z_3 \end{cases} \Rightarrow \quad \mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda \mathbb{I}_3 - \mathbb{A}) = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 4\lambda = \lambda(\lambda-2)^2.$$

Gli autovalori sono, dunque, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$. Dalla forma generale che ci aspettiamo per l'integrale generale, poniamo

$$\underline{z} = \underline{c}_1 e^{0x} + \underline{c}_2 e^{2x} + \underline{c}_3 x e^{2x}$$

dove i tre vettori devono dipendere complessivamente da tre costanti arbitrarie. Per ricavare i $\underline{c}_i$, imponiamo a $\underline{z}$ di soddisfare il sistema $\underline{z}' = \mathbb{A}\underline{z}$. Abbiamo

$$\underline{0} + 2e^{2x}\underline{c}_2 + (1+2x)e^{2x}\underline{c}_3 = \mathbb{A}\underline{c}_1 + e^{2x}\mathbb{A}\underline{c}_2 + xe^{2x}\mathbb{A}\underline{c}_3,$$

da cui ricaviamo

$$\begin{cases} \mathbb{A}\underline{c}_1 = \underline{0} \\ \mathbb{A}\underline{c}_3 = 2\underline{c}_3 \\ \mathbb{A}\underline{c}_2 = 2\underline{c}_2 + \underline{c}_3. \end{cases}$$

Quindi $\underline{c}_1$ e $\underline{c}_3$ sono autovettori, mentre $\underline{c}_2$ è ricavato dalla terza condizione. Per $\underline{c}_1$ abbiamo

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha = c_1 \\ \beta = -c_1 \\ \gamma = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \underline{c}_1 = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

per $\underline{c}_3$ ricaviamo

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha = c_3 \\ \beta = c_3 \\ \gamma = 2c_3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \underline{c}_3 = c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ed infine per $\underline{c}_2$ otteniamo

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = c_2 \\ \beta = c_2 + c_3 \\ \gamma = 2c_2 + 3c_3 \end{cases} \Rightarrow \underline{c}_3 = c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Quindi

$$\underline{z} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \left(c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right) e^{2x} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} x e^{2x}.$$

Cosideriamo, ora, un'altra classe di sistemi ed equazioni lineari, per i quali è possibile ricavare in forma esplicita l'espressione di una matrice fondamentale. Si tratta dei sistemi del tipo

$$\underline{z}' = \frac{1}{x} \mathbb{A} \underline{z}$$

dove $\mathbb{A}$ non dipende da x. È chiaro che in questo caso occorre ammettere $I =]0, +\infty[$ oppure $I =]-\infty, 0[$.

Restringendoci per semplicità nell'intervallo $]0, +\infty[$ (ma analogo discorso si può ripetere per l'altro intervallo), effettuiamo un cambiamento di variabile, ponendo $x = e^t$. Abbiamo

$$\frac{d}{dx} = \frac{dt}{dx} \frac{d}{dt} = \frac{1}{x} \frac{d}{dt}.$$

Il sistema diventa, dunque,

$$\frac{d}{dt} \underline{z} = \mathbb{A} \underline{z}$$

e siamo ricondotti al caso precedente. Dal momento che le soluzioni del sistema a coefficienti costanti hanno la forma $e^{\lambda t} \underline{h}$, $t^k e^{\lambda t} \underline{h}$, ritornando alla variabile x le soluzioni saranno del tipo $x^\lambda \underline{h}$, $x^\lambda (\ln x)^k \underline{h}$.

Passiamo a trattare l'equazione lineare strettamente connessa al sistema testè trattato. È la cosiddetta equazione di Eulero di ordine N, che ha la forma

$$a_0 x^N z^{(N)} + a_1 x^{N-1} z^{(N-1)} + \ldots + a_N z = 0$$

dove i coefficienti a_i sono costanti reali. Come nel caso del sistema, occorre qui supporre $x \neq 0$: dobbiamo, quindi, lavorare per $x > 0$ o per $x < 0$. Per una generica equazione lineare i punti in cui $a_0(x) = 0$ (in questo caso $x = 0$) sono detti punti singolari; in corrispondenza l'equazione si abbassa d'ordine e non ci possiamo aspettare regolarità per la soluzione.

All'equazione sostituiamo il sistema equivalente: il risultato mette in evidenza il legame menzionato sopra fra l'equazione di Eulero e il sistema $\underline{z}' = \frac{1}{x}\mathbb{A}\underline{z}$. Per semplicità consideriamo il caso di una equazione del secondo ordine, ma è chiaro che il procedimento è assolutamente generale. Abbiamo, dunque

$$a_0 x^2 z'' + a_1 x z' + a_2 z = 0;$$

se poniamo

$$xz' = u \quad \Rightarrow \quad x^2 z'' = xu' - u$$

possiamo riscrivere l'equazione come

$$\begin{bmatrix} z \\ u \end{bmatrix}' = \frac{1}{x}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{a_2}{a_0} & 1-\frac{a_1}{a_0} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z \\ u \end{bmatrix}$$

che è proprio della forma attesa. Tuttavia non è necessario trasformare l'equazione in sistema. Poichè ci aspettiamo delle soluzioni del tipo x^λ, tanto vale sostituire direttamente tale espressione nell'equazione lineare, per ricavare quali sono i valori di λ ammissibili. Otteniamo

$$a_0\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-N+1)x^\lambda + \ldots + a_{N-2}\lambda(\lambda-1)x^\lambda + a_{N-1}\lambda x^\lambda + a_N x^\lambda = 0.$$

Semplificando il termine comune x^λ, otteniamo l'equazione caratteristica per l'equazione di Eulero

$$a_0\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-N+1) + \ldots + a_{N-2}\lambda(\lambda-1) + a_{N-1}\lambda + a_N = 0.$$

Tenendo conto dell'analogo risultato per le equazioni a coefficienti costanti e della sostituzione $x = e^t$ che porta dal sistema di Eulero a quello a coefficienti costanti, abbiamo il seguente

Teorema 3. - *Supponiamo che l'equazione caratteristica abbia le radici*

λ_1 *con molteplicità* M_1,

λ_2 *con molteplicità* M_2,

...

λ_r *con molteplicità* M_r,

con $M_1 + M_2 + \ldots + M_r = N$. *Allora un sistema fondamentale di soluzioni per l'equazione di Eulero è dato da*

$$\begin{gathered} x^{\lambda_1}, \quad x^{\lambda_1}\ln x, \quad \ldots, \quad x^{\lambda_1}\ln^{M_1-1} x, \\ x^{\lambda_2}, \quad x^{\lambda_2}\ln x, \quad \ldots, \quad x^{\lambda_2}\ln^{M_2-1} x, \\ \ldots \\ x^{\lambda_r}, \quad x^{\lambda_r}\ln x, \quad \ldots, \quad x^{\lambda_r}\ln^{M_r-1} x \quad \blacksquare. \end{gathered}$$

Osservazione. - Se $\lambda_1 = \alpha_1 + i\beta_1$ e $\lambda_2 = \alpha_1 - i\beta_1$, alle due soluzioni

$$z_1 = x^{\alpha_1 + i\beta_1}, \quad z_2 = x^{\alpha_1 - i\beta_1},$$

posso sostituire

$$z_1^* = x^{\alpha_1} \cos(\beta_1 \ln x), \quad z_2^* = x^{\alpha_1} \sin(\beta_1 \ln x) \quad \blacksquare.$$

Osservazione. - Tutto il discorso precedente sottintende di lavorare per $x > 0$. Nel caso si voglia lavorare con più generalità per $x \neq 0$, basta sostituire x con $|x|$. Per quanto detto sopra, ci aspettiamo perdita di regolarità della soluzione in corrispondenza di $x = 0$, punto singolare. Tuttavia (ma non possiamo qui entrare nel dettaglio) esistono soluzioni che sono addirittura analitiche in un intorno di $x = 0$ $\blacksquare$.

Osservazione. - Come già osservato per le equazioni a coefficienti costanti, la ricerca dell'integrale particolare per l'equazione completa può essere effettuata senza utilizzare il Metodo della variazione delle costanti arbitrarie, ma ricorrendo ad opportune tabelle.

Concludiamo questa Sezione con alcuni cenni ai Problemi ai limiti lineari per equazioni lineari. Si chiamano anche *problemi in grande*, in contrapposizione al problema di Cauchy, poichè si richiede che le soluzioni dell'equazione differenziale (lineare in questo caso) siano definite su un prefissato intervallo $[a, b]$, agli estremi del quale si impongono le condizioni.

Per quanto riguarda i risvolti applicativi, osserviamo soltanto che i problemi ai limiti molto spesso forniscono il modello matematico per descrivere sistemi fisici.

Abbiamo allora la seguente

Definizione. - Si dice *Problema ai limiti lineare* per un'equazione lineare del secondo ordine dipendente da un parametro reale λ il seguente problema

$$(1) \qquad \begin{cases} a_0(x,\lambda)y''(x) + a_1(x,\lambda)y'(x) + a_2(x,\lambda)y(x) = f(x,\lambda) \\ \alpha(\lambda)y(a) + \beta(\lambda)y'(a) = k_1(\lambda) \\ \gamma(\lambda)y(b) + \delta(\lambda)y'(b) = k_2(\lambda). \end{cases}$$

Il problema si dice *omogeneo* se $f(x,\lambda) \equiv 0$ e $k_1 = k_2 = 0$. Se $f(x,\lambda) \not\equiv 0$ o $|k_1| + |k_2| > 0$, parliamo di problema *completo* $\blacksquare$.

Osservazione. - Il parametro $\lambda \in \mathbf{R}$, che non necessariamente compare in tutti i coefficienti dell'equazione e/o delle condizioni assegnate in a e in b, esprime usualmente le proprietà fisiche del sistema descritto dal Problema ai limiti $\blacksquare$.

Osservazione. - Le condizioni ai limiti, ossia negli estremi a e b dell'intervallo, consistono nell'assegnare in ciascuno degli estremi il valore di una opportuna combinazione lineare della soluzione e della sua derivata prima. Si devono, quindi, premettere delle ipotesi che diano senso alle condizioni stesse, ossia che garantiscano che l'integrale generale dell'equazione differenziale lineare sia di classe C^2 in tutto l'intervallo di definizione $[a, b]$. Per questo supponiamo che

a) i coefficienti $a_i(\cdot, \lambda) \in C^0([a, b])$;

b) $a_0(\cdot,\lambda) \neq 0$;
Richiediamo, inoltre, che
$$|\alpha| + |\beta| > 0, \qquad |\gamma| + |\delta| > 0$$
per garantire che le condizioni assegnate siano effettivamente due $\blacksquare$.

Osservazione. - Si possono considerare anche condizioni ai limiti più generali di quelle viste sopra, ossia
$$\begin{cases} \alpha y(a) + \beta y'(a) + \tilde{\alpha} y(b) + \tilde{\beta} y'(b) = k_1 \\ \gamma y(b) + \delta y'(b) + \tilde{\gamma} y(a) + \tilde{\delta} y'(a) = k_2. \end{cases}$$
L'interesse per questo tipo di condizioni risiede nel fatto che se
$$\beta = \tilde{\beta} = k_1 = 0, \quad \alpha = -\tilde{\alpha} \neq 0, \quad \gamma = \tilde{\gamma} = k_2 = 0, \quad \delta = -\tilde{\delta} \neq 0,$$
ci riduciamo alle cosiddette *condizioni di periodicità*
$$\begin{cases} y(a) = y(b) \\ y'(a) = y'(b), \end{cases}$$
di grande interesse in molte applicazioni $\blacksquare$.

Definizione. - Definiamo *Problema ai limiti omogeneo* associato al Problema (1) il seguente problema

$$\begin{cases} a_0(x,\lambda) z''(x) + a_1(x,\lambda) z'(x) + a_2(x,\lambda) z(x) = 0 \\ \alpha(\lambda) z(a) + \beta(\lambda) z'(a) = 0 \\ \gamma(\lambda) z(b) + \delta(\lambda) z'(b) = 0 \quad \blacksquare. \end{cases} \tag{2}$$

I problemi ai limiti lineari possono essere completamente risolti, in quanto il loro studio si riconduce allo studio di sistemi lineari algebrici di due equazioni nelle due costanti arbitrarie C_1 e C_2 che compaiono nell'integrale generale dell'equazione lineare. I Problemi ai limiti lineari omogenei o completi danno luogo a sistemi algebrici lineari rispettivamente omogenei o completi. Notevoli difficoltà presentano invece i Problemi ai limiti non lineari, in primo luogo perchè per le equazioni non lineari non vale in generale il Teorema di esistenza ed unicità in grande.

Consideriamo, dunque, dapprima il Problema ai limiti omogeneo e poi il Problema ai limiti completo.

Caso I. - Risolviamo il Problema (2). L'integrale generale dell'equazione omogenea è
$$z = C_1 w_1(x,\lambda) + C_2 w_2(x,\lambda)$$
dove w_1 e w_2 sono integrali particolari linearmente indipendenti. Imponendo le condizioni ai limiti otteniamo il sistema lineare algebrico

$$\begin{cases} m_{11}(\lambda) C_1 + m_{12}(\lambda) C_2 = 0 \\ m_{21}(\lambda) C_1 + m_{22}(\lambda) C_2 = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Studiamo, ora, al variare di $\lambda \in \mathbf{R}$ le soluzioni C_1 e C_2 del sistema (3); in corrispondenza otterremo le soluzioni $z(x)$ del Problema (2). È chiaro che per ogni valore di $\lambda \in \mathbf{R}$ il Problema (3) ammette sempre la soluzione banale. Si tratta, dunque, di determinare soluzioni non banali. Tali eventuali soluzioni non banali, che possono esistere in corrispondenza di convenienti valori del parametro $\lambda \in \mathbf{R}$, si dicono *autosoluzioni.* I valori di $\lambda \in \mathbf{R}$ in corrispondenza dei quali abbiamo autosoluzioni si dicono *autovalori.*

La determinazioni degli autovalori (e delle corrispondenti autosoluzioni) è basata su ben noti risultati di Algebra Lineare.

a) Detto $\Delta(\lambda)$ il determinante della matrice dei coefficienti del sistema (3), per tutti i $\lambda \in \mathbf{R}$ tali che $\Delta(\lambda) \neq 0$, esiste solo la soluzione banale $C_1 = C_2 = 0$. Tali λ non sono, quindi, significativi e non esistono autosoluzioni.

b) Per tutti i $\lambda \in \mathbf{R}$ tali che $\Delta(\lambda) = 0$ (λ autovalore), il sistema (3) ammette infinite soluzioni e ciò implica che il Problema (2) ammette infinite autosoluzioni.

Caso II. - Discutiamo, ora, il Problema ai limiti completo (1). L'integrale generale dell'equazione completa è

$$y = C_1 w_1(x,\lambda) + C_2 w_2(x,\lambda) + y_P(x,\lambda)$$

dove w_1 e w_2 sono integrali particolari linearmente indipendenti dell'equazione omogenea e y_P è un integrale particolare dell'equazione completa. Imponendo le condizioni ai limiti otteniamo il sistema lineare algebrico

$$\text{(4)} \qquad \begin{cases} m_{11}(\lambda)C_1 + m_{12}(\lambda)C_2 = h_1(\lambda) \\ m_{21}(\lambda)C_1 + m_{22}(\lambda)C_2 = h_2(\lambda). \end{cases}$$

Studiamo, ora, al variare di $\lambda \in \mathbf{R}$ le soluzioni C_1 e C_2 del sistema (4). Come prima utilizziamo risultati di Algebra Lineare.

a) Per tutti i $\lambda \in \mathbf{R}$ tali che $\Delta(\lambda) \neq 0$ (λ non autovalore), esiste unica la soluzione del sistema (4) data dalla coppia $\tilde{C}_1$, $\tilde{C}_2$, determinabile con la regola di Cramer. Corrispondentemente esiste unica la soluzione $y = y(x, \lambda, \tilde{C}_1, \tilde{C}_2)$ del Problema (1).

b) Per tutti i $\lambda \in \mathbf{R}$ tali che $\Delta(\lambda) = 0$ (λ autovalore), il sistema (4) non ammette soluzioni (equazioni incompatibili) oppure esistono infinite soluzioni (i termini noti h_1 e h_2 soddisfano convenienti condizioni di compatibilità). Corrispondentemente il Problema ai limiti non ammette soluzioni ($f(x)$, k_1 e k_2 sono incompatibili), oppure ammette infinite soluzioni ($f(x)$, k_1 e k_2 soddisfano opportune condizioni di compatibilità).

Osservazione. - I risultati relativi al Problema ai limiti completo (1) sono sintetizzati dal cosiddetto *Principio dell'Alternativa*: o si ha contemporaneamente esistenza ed unicità della soluzione del Problema (1), oppure manca sia l'esistenza sia l'unicità, a meno che i termini noti del Problema soddisfino particolari condizioni. In questa eventualità si ha l'esistenza di infinite soluzioni, ossia viene a mancare l'unicità ■.

Ricerca di integrali particolari di alcune equazioni lineari

Per le equazioni lineari a coefficienti costanti e per quelle di Eulero, la ricerca di un integrale particolare $\varphi(x)$ può, in alcuni casi, essere fatta evitando l'uso del metodo di variazione delle costanti arbitrarie, ricercando $\varphi(x)$ secondo lo schema sotto riportato. I coefficienti che compaiono nelle espressioni di $\varphi(x)$ vanno determinati imponendo a $\varphi(x)$ di soddisfare identicamente l'equazione differenziale.

a) Equazioni lineari a coefficienti costanti

$$(*) \qquad a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = F(x)$$

1) $F(x) = P_m(x)$ polinomio in x di grado $m \geq 0$:
   $\varphi(x) = P_q(x)$ polinomio in x (a coefficienti da determinarsi) di grado q ove $q = m + r$ essendo r l'ordine minimo di derivazione con cui compare la y al primo membro della (*) (La y è considerata come derivata di ordine zero, quindi $a_n \neq 0 \ \rightarrow \ r = 0$).
2) $F(x) = he^{kx}$ (h e k costanti assegnate):

   α) Se k non è radice dell'equazione caratteristica
   $\varphi(x) = Ae^{kx}$, A costante da determinarsi;
   β) Se k è radice r-pla dell'equazione caratteristica
   $\varphi(x) = Ax^r e^{kx}$, A costante da determinarsi.
3) $F(x) = P_m(x)e^{kx}$, $P_m(x)$ polinomio in x di grado $m > 0$:
   $\varphi(x) = P_q(x)e^{kx}$, $P_q(x)$ polinomio in x (a coefficienti da determinarsi) di grado q, ove $q = m$ se k non è radice dell'equazione caratteristica e $q = m + r$ se k è radice r-pla dell'equazione caratteristica.
4) $F(x) = h\sin(kx)$ oppure $F(x) = h\cos(kx)$ (h e k costanti assegnate):

   α) Se $\pm ik$ non sono radici dell'equazione caratteristica
   $\varphi(x) = A\sin(kx) + B\cos(kx)$, $A, \ B$ costanti da determinarsi;
   β) Se $\pm ik$ sono radici r-ple dell'equazione caratteristica
   $\varphi(x) = x^r(A\sin(kx) + B\cos(kx))$, $A, \ B$ costanti da determinarsi.
5) $F(x) = h\sinh(kx)$ oppure $F(x) = h\cosh(kx)$ (h e k costanti assegnate):

α) Se $\pm k$ non sono radici dell'equazione caratteristica
$\varphi(x) = A\sinh(kx) + B\cosh(kx)$, A, B costanti da determinarsi;

β) Se $+k$ o $-k$ è radice dell'equazione caratteristica, si pone

$$\sinh(kx) = \frac{e^{kx} - e^{-kx}}{2}, \qquad \cosh(kx) = \frac{e^{kx} + e^{-kx}}{2}$$

e ci si rifa ai casi 2) e 7).

6) $F(x) = e^{px}\sin(qx)$ oppure $F(x) = e^{px}\cos(qx)$ (p e q costanti assegnate):

α) Se $p \pm iq$ non sono radici dell'equazione caratteristica
$\varphi(x) = e^{px}(A\sin(qx) + B\cos(qx))$, A, B costanti da determinarsi;

β) Se $p \pm iq$ sono radici r-ple dell'equazione caratteristica
$\varphi(x) = x^r e^{px}(A\sin(qx) + B\cos(qx))$, A, B costanti da determinarsi.

7) Se $F(x)$ è somma di funzioni dei tipi precedenti, si pone $\varphi(x)$ uguale alla somma dei corrispondenti integrali particolari.

N.B. Se nella $\varphi(x)$ compaiono addendi che sono integrali particolari dell'equazione omogenea associata alla (*), si trascurano poichè si possono considerare già conglobati negli integrali della omogenea (cambierebbero solo le costanti moltiplicative).

b) Equazioni di Eulero

$$(**) \qquad a_0x^ny^{(n)} + a_1x^{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}xy' + a_ny = F(x)$$

1) $F(x) = hx^k$ (h e k costanti assegnate):

α) Se k non è radice dell'equazione caratteristica
$\varphi(x) = Ax^k$, A costante da determinarsi;

β) Se k è radice r-pla dell'equazione caratteristica
$\varphi(x) = Ax^k\log^r x$, A costante da determinarsi.

2) $F(x) = P_m(\log x)$ polinomio in $\log x$ di grado $m > 0$:
$\varphi(x) = P_q(\log x)$ polinomio in $\log x$ (a coefficienti da determinarsi) di grado q ove $q = m + r$ essendo r la molteplicità della eventuale radice $\lambda = 0$ dell'equazione caratteristica.

3) Se $F(x)$ è somma di funzioni dei tipi precedenti, si pone $\varphi(x)$ uguale alla somma dei corrispondenti integrali particolari.

N.B. Se nella $\varphi(x)$ compaiono addendi che sono integrali particolari dell'equazione omogenea associata alla (**), si trascurano poichè si possono considerare già conglobati negli integrali della omogenea (cambierebbero solo le costanti moltiplicative).