9. Classificazione delle equazioni del secondo ordine

Consideriamo la più generale equazione quasilineare del secondo ordine in due variabili indipendenti

$$a\,u_{xx} + 2b\,u_{xy} + c\,u_{yy} = d \qquad (x, y) \in \mathbf{R}^2, \tag{1}$$

dove a, b, c, d dipendono da x, y, u, u_x, u_y ed almeno uno fra a, b, c è diverso da zero. In questo caso il Problema di Cauchy consiste nel determinare la soluzione u di classe C^2 avendo assegnato su una linea regolare Γ del piano xy di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = f(s) \\ y = g(s) \end{cases} \qquad f, g \in C^2(-\delta, \delta) \text{ per qualche } \delta > 0$$

i valori di u, u_x, u_y. Avremo, dunque,

$$\begin{cases} u|_\Gamma = h(s) \\ u_x|_\Gamma = \varphi(s) \\ u_y|_\Gamma = \psi(s) \end{cases} \qquad h, \varphi, \psi \in C^2(-\delta, \delta).$$

Questi valori non possono tuttavia essere assegnati del tutto arbitrariamente. Se consideriamo, infatti, $v = v(x, y)$ e $x = x(s)$, $y = y(s)$ otteniamo

$$\frac{dv}{ds} = \frac{\partial v}{\partial x} x' + \frac{\partial v}{\partial y} y' = v_x x' + v_y y'$$

e per $u = v$ lungo la linea Γ otteniamo

$$h'(s) = \varphi(s) f'(s) + \psi(s) g'(s).$$

Perciò delle tre funzioni h, φ, ψ, per f e g dati, solo due possono essere assegnate arbitrariamente. Questo fatto si risolve assegnando in maniera più naturale lungo Γ due sole condizioni, ossia i valori di u e di $\frac{\partial u}{\partial n}$, derivata direzionale di u nella direzione normale alla linea Γ.

Analogamente abbiamo relazioni di compatibilità anche sulle derivate parziali di ordine superiore di una funzione lungo la linea Γ che porta i dati. Infatti supponiamo che u sia soluzione del nostro problema: allora dalla relazione precedente ricaviamo che

$$\frac{du_x}{ds} = \frac{\partial u_x}{\partial x} x' + \frac{\partial u_x}{\partial y} y' = u_{xx} f' + u_{xy} g',$$

$$\frac{du_y}{ds} = \frac{\partial u_y}{\partial x} x' + \frac{\partial u_y}{\partial y} y' = u_{xy} f' + u_{yy} g'.$$

Abbiamo così ottenuto tre relazioni che esprimono le tre derivate seconde di u lungo la linea Γ

$$\begin{cases} a u_{xx} + 2b u_{xy} + c u_{yy} = d \\ f' u_{xx} + g' u_{xy} = \varphi' \\ f' u_{xy} + g' u_{yy} = \psi' \end{cases}$$

dove le quantità a, b, c, d sono da considerarsi note perchè ci muoviamo su Γ. Se, dunque,

$$\triangle = \begin{vmatrix} a & 2b & c \\ f' & g' & 0 \\ 0 & f' & g' \end{vmatrix} \neq 0$$

la soluzione costituita dalle tre derivate u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} esiste unica. Se, invece, $\triangle = 0$, la soluzione non esiste a meno di ulteriori condizioni di compatibilità fra i dati. In generale la linea Γ lungo la quale $\triangle = 0$ è detta *linea caratteristica.*

Sviluppando il determinante otteniamo

$$a(g')^2 - 2bf'g' + c(f')^2 = 0$$

od anche, dal momento che in un intorno di $x_0 \in \mathbf{R}$ si può sempre pensare di passare dalla forma parametrica a quella cartesiana per la linea Γ,

$$a(dy)^2 - 2bdxdy + c(dx)^2 = 0$$

da cui ricaviamo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}. \tag{2}$$

Questa è una normale equazione differenziale in x e y purchè a, b, c siano funzioni note di x e y. Ciò accade in due casi:

i) lavoriamo con una equazione quasilineare a u fissato;

ii) l'equazione è lineare, ossia i coefficienti a, b e c dipendono proprio solo da x e y.

Osserviamo inoltre che se la linea caratteristica è data nella forma implicita $\Phi(x, y) = 0$, poichè da essa risulta $\Phi_y dy + \Phi_x dx = 0$, l'equazione differenziale precedente diviene

$$a\,\Phi_x^2 + 2b\,\Phi_x\Phi_y + c\,\Phi_y^2 = 0, \tag{3}$$

espressione che ci tornerà utile nel seguito.

Ritorniamo, ora, alla relazione precedente che esprime le caratteristiche. Diciamo che la (1) è

a) iperbolica se $b^2 - ac > 0$;
b) ellittica se $b^2 - ac < 0$;
c) parabolica se $b^2 - ac = 0$.

Corrispondentemente abbiamo una doppia famiglia di caratteristiche, nessuna famiglia o una sola famiglia. Vale la pena di osservare che nel caso lineare una stessa equazione può avere nature diverse in regioni distinte del piano, mentre nel caso non lineare la situazione può essere molto più complicata, in particolare la natura dell'equazione può dipendere dalla soluzione stessa.

Esempio 1. - Consideriamo la cosiddetta equazione di Tricomi

$$yu_{xx} - u_{yy} = 0.$$

Abbiamo

$$a = y, \qquad b = 0, \qquad c = -1 \qquad \Rightarrow \qquad b^2 - ac = y.$$

Perciò l'equazione è
a) iperbolica se $y > 0$;
b) parabolica se $y = 0$;
c) ellittica se $y < 0$ $\blacksquare$.

Esempio 2. - Esaminiamo l'equazione che modellizza il flusso stazionario piano di un fluido comprimibile di densità u e velocità Du, ossia

$$(V^2 - u_x^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (V^2 - u_y^2)u_{yy} = 0$$

dove $V > 0$ è la velocità del suono. Abbiamo

$$a = V^2 - u_x^2, \qquad b = -u_x u_y, \qquad c = V^2 - u_y^2 \qquad \Rightarrow \qquad b^2 - ac = V^2(|Du|^2 - V^2).$$

Quindi
a) se $|Du| > V$ (flusso supersonico) l'equazione è iperbolica;
b) se $|Du| = V$ (flusso sonico) l'equazione è parabolica;
c) se $|Du| < V$ (flusso subsonico) l'equazione è ellittica $\blacksquare$.

Se consideriamo equazioni (o sistemi) più generali di quelli trattati finora, in particolare se assumiamo che le variabili siano in numero $m > 2$, è possibile riprodurre una classificazione analoga alla precedente, utilizzando pressochè le medesime tecniche. Si introduce allora la nozione di superficie caratteristica $m-1$-dimensionale, che risulta soluzione di una equazione alle derivate parziali che generalizza la (2), e si ripete la classificazione in equazioni iperboliche, paraboliche, ellittiche.

Si può dimostrare che le superfici caratteristiche di una equazione o di un sistema iperbolico passanti per un punto $\bar{P}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m)$ inviluppano un conoide (cono a generatrici curve) detto *caratteristico* che ha vertice in $\bar{P}$. Dalla definizione di caratteristica, segue che perchè si possano assegnare sopra una linea o una $m-1$-superficie Γ i dati di un Problema di Cauchy, la stessa Γ non deve essere tangente in alcun suo punto ad una linea o superficie carattteristica; in questo secondo caso basterà controllare che Γ non sia tangente ad alcun conoide caratteristico avente vertice su Γ.

Nel seguito ci limiteremo alle equazioni <u>lineari</u> che nella forma più generale hanno espressione

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + 2du_x + 2eu_y + fu = 0. \tag{4}$$

Il nostro obbiettivo è ora quello di introdurre delle nuove coordinate (al posto di x e y) per ridurre l'equazione alla forma più semplice possibile. Se poniamo, dunque,

$$\xi = \xi(x, y) = \Phi(x, y),$$

$$\eta = \eta(x, y) = \Psi(x, y)$$

la (4) assume la nuova espressione

$$Lu = Au_{\xi\xi} + 2Bu_{\xi\eta} + Cu_{\eta\eta} + Du_\xi + Eu_\eta + Fu = 0 \tag{5}$$

dove

$$A = a\,\Phi_x^2 + 2b\,\Phi_x\Phi_y + c\,\Phi_y^2, \tag{5'}$$

$$B = a\,\Psi_x\Phi_x + b\,(\Psi_x\Phi_y + \Phi_x\Psi_y) + c\,\Psi_y\Phi_y, \tag{5''}$$

$$C = a\,\Psi_x^2 + 2b\,\Psi_x\Psi_y + c\,\Psi_y^2. \tag{5'''}$$

Nel caso <u>iperbolico</u>, scegliendo come nuove coordinate le linee caratteristiche che costituiscono una doppia famiglia, dalla (3) ricaviamo che $A = C = 0$ e la (4) diviene

$$u_{\xi\eta} + 2Du_\xi + 2Eu_\eta + Fu = 0, \tag{6}$$

che è normalmente indicata come *prima forma canonica* dell'equazione iperbolica; corrispondentemente le nuove linee caratteristiche sono $\xi = cost$ e $\eta = cost$.

Con l'ulteriore trasformazione

$$x' = \xi + \eta, \qquad y' = \xi - \eta,$$

otteniamo

$$u_{y'y'} - u_{x'x'} + 2D'u_{x'} + 2E'u_{y'} + F'u = 0$$

e parliamo di *seconda forma canonica* dell'equazione iperbolica.

Nel caso di equazioni <u>ellittiche</u> non ci sono linee caratteristiche. Cerchiamo una trasformazione che dia all'equazione la forma

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + 2Du_\xi + 2Eu_\eta + Fu = 0.$$

In pratica, riferendoci alla (5), cerchiamo una trasformazione tale che $A = C \neq 0$ e $B = 0$. Imponendo tali condizioni abbiamo

$$\begin{cases} A = C \\ B = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} a\,\Phi_x^2 + 2b\,\Phi_x\Phi_y + c\,\Phi_y^2 = a\,\Psi_x^2 + 2b\,\Psi_x\Psi_y + c\Psi_y^2 \\ a\,\Psi_x\Phi_x + b\,(\Psi_x\Phi_y + \Phi_x\Psi_y) + c\,\Psi_y\Phi_y = 0. \end{cases}$$

Dalla seconda equazione otteniamo

$$\Phi_x(a\,\Psi_x + b\,\Psi_y) + \Phi_y(b\,\Psi_x + c\,\Psi_y) = 0,$$

cioè anche

$$\Phi_x = -\frac{b\,\Psi_x + c\,\Psi_y}{a\,\Psi_x + b\,\Psi_y}\,\Phi_y. \tag{7}$$

Sostituendo nella prima ricaviamo

$$\Phi_y = -\frac{a\,\Psi_x + b\,\Psi_y}{\sqrt{ac-b^2}} \tag{8}$$

e tornando alla (7) otteniamo infine che

$$\Phi_x = \frac{b\,\Psi_x + c\,\Psi_y}{\sqrt{ac-b^2}}. \tag{9}$$

La (8) e la (9), dette *equazioni di Beltrami*, identificano (in forma differenziale!) la trasformazione cercata. Val la pena di osservare che non serve conoscere l'integrale generale del sistema (8) - (9): una qualunque soluzione (Φ, Ψ) che soddisfi la condizione (necessaria per l'invertibilità) $\Phi_x\Psi_y - \Phi_y\Psi_x \neq 0$ va bene.

Sviluppiamo i calcoli nel caso (particolarmente semplice) in cui la (4) abbia coefficienti costanti. Cerchiamo soluzioni lineari in x e y, ossia della forma

$$\Phi(x,y) = \alpha\,x + \beta\,y, \qquad \Psi(x,y) = \gamma\,x + \delta\,y$$

con α, β, γ e δ costanti da determinare. Sostituendo in (8) - (9) otteniamo

$$\alpha = \frac{c}{\sqrt{ac-b^2}}\,\delta + \frac{b}{\sqrt{ac-b^2}}\,\gamma, \qquad \beta = -\frac{b}{\sqrt{ac-b^2}}\,\delta - \frac{a}{\sqrt{ac-b^2}}\,\gamma.$$

È evidente che per ogni scelta di γ e δ ricaviamo α e β. Se per semplicità assumiamo $\gamma = 1$ e $\delta = 0$, ci riduciamo a

$$\alpha = \frac{b}{\sqrt{ac-b^2}}, \qquad \beta = -\frac{a}{\sqrt{ac-b^2}}$$

e alla trasformazione

$$\begin{cases} \xi = \dfrac{b}{\sqrt{ac-b^2}}\,x - \dfrac{a}{\sqrt{ac-b^2}}\,y \\ \eta = x. \end{cases}$$

Il risultato è la forma canonica

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \frac{db - ea}{a\sqrt{ac-b^2}}\,u_\xi + \frac{d}{a}\,u_\eta + \frac{f}{a}\,u = 0$$

dove la divisione per il termine a non crea problemi, perchè $b^2 - ac < 0$ implica necessariamente che a sia diverso da zero.

Con un ulteriore cambiamento di variabile sarebbe possibile eliminare anche le derivate u_ξ e u_η, ma tralasciamo questo aspetto.

Concludiamo con le equazioni <u>paraboliche</u> e la relativa forma canonica. Dal momento che $b^2 - ac = 0$, per quanto riguarda l'equazione dell'unica famiglia di caratteristiche, dalla (2) otteniamo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} \tag{10}$$

o equivalentemente dalla (3)

$$(10') \qquad (\sqrt{a}\,\Phi_x \pm \sqrt{c}\,\Phi_y)^2 = 0,$$

avendo assunto che a e c sono entrambe positive (è banale modificare l'espressione precedente qualora a e c siano entrambe negative). Si noti che l'ambiguità del segno nella (10') deriva dalla $b = \pm\sqrt{ac}$ e può essere risolta solo caso per caso guardando al segno di b. Dalla (10') otteniamo

$$\Phi_x = \mp\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}}\Phi_y$$

ed anche

$$B = a\,\Psi_x(\mp\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}}\Phi_y) \pm \sqrt{ac}(\Psi_x\Phi_y \mp \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}}\Phi_y\Psi_y) + c\Psi_y\Phi_y = 0.$$

Se dunque scegliamo per Φ la caratteristica e $\Psi(x,y) = y$ che garantisce che C non sia nullo, otteniamo

$$u_{\eta\eta} = H(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$$

che è nota come *forma canonica* dell'equazione parabolica. Analogamente, lavorando con l'altra variabile, abbiamo l'altra forma canonica

$$u_{\xi\xi} = K(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$$

Esempio 3. - Consideriamo l'equazione

$$(11) \qquad xu_{xx} + u_{yy} = x^2.$$

Ci ripromettiamo di determinare le caratteristiche e di ridurre poi l'equazione in forma canonica. Per quanto riguarda le caratteristiche, dal momento che

$$b = 0, \qquad a = x, \qquad c = 1,$$

abbiamo che $b^2 - ac = -x$ e quindi l'equazione è
a) iperbolica se $x < 0$;
b) parabolica se $x = 0$;
c) ellittica se $x > 0$.

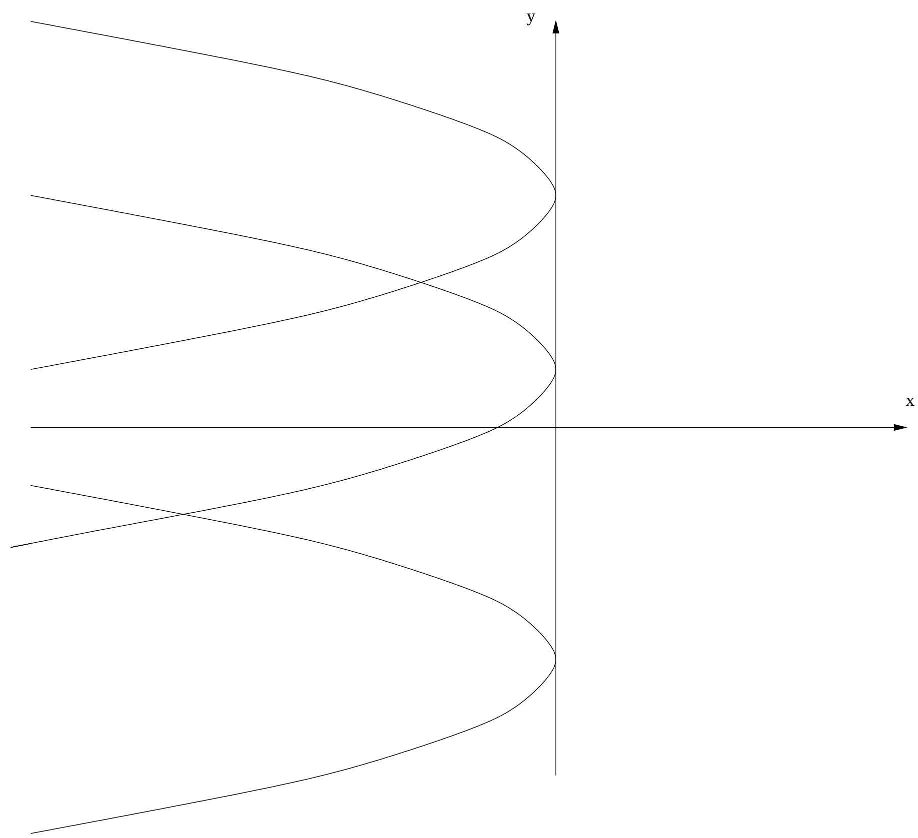
Nel caso iperbolico, le equazioni delle caratteristiche sono

$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{\sqrt{-x}}{x} = \pm\frac{1}{\sqrt{-x}}.$$

Separando le variabili otteniamo

$$y = \pm 2\sqrt{-x} + C.$$

Si tratta dei due rami di una parabola, come indicato nel disegno. Osserviamo che i due rami sono tangenti all'asse y che è l'unica caratteristica della regione parabolica (in realtà proprio a tale asse si riduce la regione parabolica). Ovviamente non ci sono caratteristiche nella regione ellittica.



Linee caratteristiche dell'equazione (11)

Passando alla riduzione alla forma canonica, per $x < 0$ scegliamo il cambiamento di variabile

$$\xi = y + 2\sqrt{-x}, \qquad \eta = y - 2\sqrt{-x}.$$

Abbiamo poi

$$u_x = u_\xi(-\frac{1}{\sqrt{-x}}) + u_\eta(\frac{1}{\sqrt{-x}}),$$

$$u_y = u_\xi + u_\eta,$$

$$u_{xx} = -\frac{1}{2}(-x)^{-3/2}u_\xi + (-\frac{1}{x})u_{\xi\xi} + \frac{2}{x}u_{\xi\eta} + \frac{1}{2}(-x)^{-3/2}u_\eta + (-\frac{1}{x})u_{\eta\eta},$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}.$$

Sostituendo nella (11) otteniamo

$$4u_{\xi\eta} = x^2 + \frac{1}{2}(-x)^{-1/2}u_\xi - \frac{1}{2}(-x)^{-1/2}u_\eta.$$

Osserviamo che

$$\xi - \eta = 4(-x)^{1/2} \qquad \Rightarrow \qquad \left(\frac{\xi-\eta}{4}\right)^4 = x^2.$$

Perciò concludiamo che la forma canonica è

$$u_{\xi\eta} = \frac{1}{4}\left[\frac{(\xi-\eta)^4}{256} + 2(\xi-\eta)^{-1}(u_\xi - u_\eta)\right].$$

Tralasciamo il calcolo nel caso ellittico. Nel caso parabolico, infine, $x = 0$ è la linea caratteristica e l'equazione si riduce a $u_{yy} = 0$ che è già in forma canonica. Osserviamo che attraverso $x = 0$ avviene la transizione fra il caso iperbolico ed il caso ellittico ■.

La trattazione precedente ha chiaramente messo in luce una prima interpretazione delle linee caratteristiche come quelle linee che permettono di ridurre l'equazione alla forma canonica (nel caso ellittico e parabolico). Vogliamo ora illustrare altri due significati delle caratteristiche nel caso iperbolico, peraltro già impliciti in quanto svolto sopra. Seguiamo qui la trattazione esposta nel testo di Kevorkian [cfr. la bibliografia per il riferimento preciso].

Consideriamo la curva Γ del piano xy definita dall'equazione

$$\Phi(x,y) = \xi_0.$$

Come già detto sopra, il Problema di Cauchy consiste nell'assegnare su Γ il valore di u e di $\frac{\partial u}{\partial n}$, dove assumiamo il versore n entrante nel dominio $\mathcal{D}$ in cui vogliamo risolvere l'equazione.

Se ora consideriamo il cambiamento di variabile

$$\begin{cases} \xi = \Phi(x,y), \\ \eta = \Psi(x,y), \end{cases}$$

dove Φ è la stessa funzione che definisce la Γ e Ψ è assunta in modo tale che

$$\Phi_x\Psi_y - \Phi_y\Psi_x \neq 0 \qquad \text{in } \mathcal{D},$$

abbiamo già visto che la (4) si trasforma nella (5), dove i coefficienti sono espressi dalle (5') - (5"'). Conseguentemente il problema di Cauchy diventa

$$\begin{cases} u(\xi_0,\eta) = \alpha(\eta), \\ u_\xi(\xi_0,\eta) = \beta(\eta). \end{cases}$$

Ci chiediamo ora se queste condizioni, insieme alla (5), permettano di calcolare $u(\xi,\eta)$ in un intorno della linea Γ' definita da $\Phi(x,y) = \xi_1$, con $\xi_1 = \xi_0 + \Delta\xi$.

È naturale usare in questo contesto uno sviluppo di Taylor arrestato al secondo ordine (u è di classe C^2) per ottenere

$$u(\xi_1,\eta) = u(\xi_0,\eta) + u_\xi(\xi_0,\eta)\Delta\xi + u_{\xi\xi}(\xi_0,\eta)\frac{(\Delta\xi)^2}{2} + o((\Delta\xi)^2).$$

Poichè conosciamo $u(\xi_0, \eta)$ e $u_\xi(\xi_0, \eta)$, per determinare u con un errore di ordine superiore a $o((\Delta\xi^2))$ basta determinare $u_{\xi\xi}(\xi_0, \eta)$. Ricordando quanto fatto all'inizio della Sezione, siamo in grado di determinare tale quantità proprio se $A \neq 0$, ossia se Γ non è una linea caratteristica. Mettere i dati su una linea che non sia una caratteristica, dunque, permette non solo di calcolare i valori delle derivate seconde lungo tale linea, ma anche di costruire la soluzione u in tutto un intorno. Detto in altri termini, le linee caratteristiche sono le linee lungo le quali le condizioni di Cauchy non permettono di determinare un'unica soluzione nell'intorno.

Se, quindi, $A \neq 0$, dalla (5) ricaviamo che

$$u_{\xi\xi}(\xi_0, \eta) = -\frac{2B}{A} u_{\xi\eta}(\xi_0, \eta) - \frac{C}{A} u_{\eta\eta}(\xi_0, \eta) - \frac{D}{A} u_\xi(\xi_0, \eta) - \frac{E}{A} u_\eta(\xi_0, \eta) - \frac{F}{A} u(\xi_0, \eta)$$

e tenendo conto delle condizioni iniziali, nonchè del fatto che

$$u_\eta(\xi_0, \eta) = \alpha'(\eta), \quad u_{\eta\eta}(\xi_0, \eta) = \alpha''(\eta), \quad u_{\xi\eta}(\xi_0, \eta) = \beta'(\eta)$$

abbiamo finito.

Cambiando prospettiva, supponiamo di aver risolto la (5) su entrambi i lati della linea Γ e che la u sia di classe C^2 ovunque fuori da Γ; supponiamo inoltre che lungo Γ u, u_ξ, u_η, $u_{\eta\eta}$, $u_{\xi\eta}$ siano ancora continue, ma che $u_{\xi\xi}$ non lo sia. Ci chiediamo se sia possibile scegliere Γ in modo tale che la (5) sia soddisfatta lungo la stessa Γ anche se $u_{\xi\xi}(\xi_0^+, \eta) \neq u_{\xi\xi}(\xi_0^-, \eta)$.

Se valutiamo la (5) sui due lati di Γ e sottraiamo termine a termine, grazie alla linearità dell'equazione e alla continuità di tutte le altre derivate, ci riduciamo a

$$A(\xi_0, \eta)[u_{\xi\xi}(\xi_0^+, \eta) - u_{\xi\xi}(\xi_0^-, \eta)] = 0.$$

Quindi la (5) è banalmente soddisfatta se $u_{\xi\xi}$ è continua lungo Γ, ma anche se $A(\xi_0, \eta) = 0$, ossia ancora una volta se Γ è una linea caratteristica.

Possiamo, dunque, concludere che le caratteristiche sono luoghi di possibile discontinuità per le derivate seconde, come già chiaro nella discussione svolta all'inizio. Vale soprattutto la pena di osservare che, quando il salto di $u_{\xi\xi}$ è specificato in qualche punto di Γ, la propagazione di tale discontinuità è interamente determinata dalla (5).

Posto, infatti,

$$\rho(\xi_0, \eta) = u_{\xi\xi}(\xi_0^+, \eta) - u_{\xi\xi}(\xi_0^-, \eta),$$

si ottiene l'equazione differenziale

$$\frac{\partial \rho}{\partial \eta} = -R(\xi_0, \eta)\rho \qquad \text{con} \qquad R(\xi_0, \eta) = \frac{D(\xi_0, \eta) + A(\xi_0, \eta)}{2B(\xi_0, \eta)}.$$

Assegnato ρ in (ξ_0, η_0) si ricava

$$\rho(\xi_0, \eta) = \rho(\xi_0, \eta_0) \exp[-\int_{\eta_0}^{\eta} R(\xi_0, s)\, ds]$$

e, come già visto per il Teorema di Liouville, $\rho(\xi_0, \eta)$ è identicamente nullo se $\rho(\xi_0, \eta_0) = 0$, mentre $\rho(\xi_0, \eta)$ non si annulla mai se $\rho(\xi_0, \eta_0) \neq 0$.

In maniera assolutamente analoga si propagano lungo l'altra caratteristica le discontinuità di $u_{\eta\eta}$.

Ora vogliamo esaminare alcune proprietà delle equazioni nei tre casi iperbolico, parabolico ed ellittico prima trattati: come già precedentemente indicato, ci limitiamo alle equazioni ineari.

Caso I - Cominciamo con le equazioni iperboliche, la più semplice delle quali è del tipo

$$u_{tt} - V^2 u_{xx} = 0.$$

Le caratteristiche sono le linee $x \pm Vt = cost.$ Se ci riferiamo ad esse, ponendo $\xi = x - Vt$, $\eta = x + Vt$, l'equazione assume la forma

$$u_{\xi\eta} = 0$$

che integrata fornisce la soluzione

$$u = F(\xi) + G(\eta) = F(x - Vt) + G(x + Vt)$$

dove F e G sno due arbitrarie funzioni di classe C^2. Osserviamo che in dipendenza dalla regolarità di F e G anche u è di classe C^2. Fisicamente la soluzione è interpretabile come la somma di una perturbazione che viaggia verso destra con velocità V (è il termine in F) ed una che viaggia verso sinistra con la medesima velocità (è il termine in G). Possiamo, dunque, dire che si tratta di un problema di tipo ondulatorio.

a) - Se descriviamo un fenomeno spazialmente infinito, abbiamo le cosiddette *condizioni iniziali* (in inglese *initial conditions*, abbreviato in *IC*):

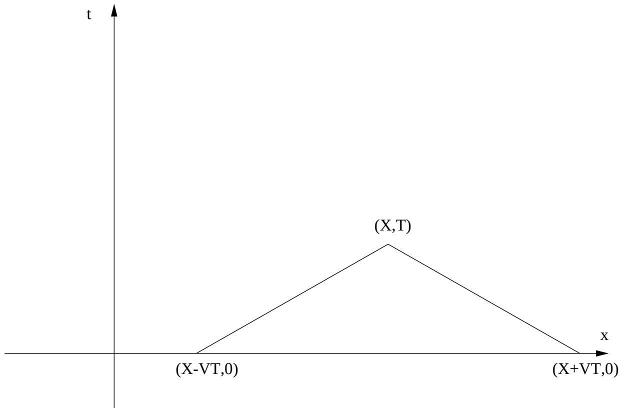
$$u(x,0) = f(x) \qquad f \in C^2(\mathbf{R}), \qquad u_t(x,0) = g(x) \qquad g \in C^1(\mathbf{R}).$$

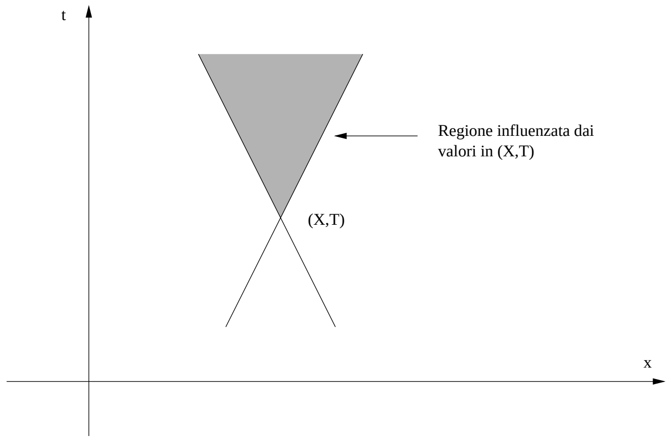
Osserviamo che da un punto di vista fisico stiamo studiando le oscillazioni di una corda di lunghezza infinita. Inoltre l'assegnazione delle condizioni lungo la retta $t = 0$ è corretta, perchè non si tratta di una linea caratteristica.

Con semplici calcoli, si ottiene che

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x + Vt) + f(x - Vt)] + \frac{1}{2V} \int_{x-Vt}^{x+Vt} g(s)\, ds$$

ed è faciler vedere che, grazie alla regolarità di f e g, u è di classe C^2 come richiesto. In questo caso parliamo di soluzione di D'Alembert.



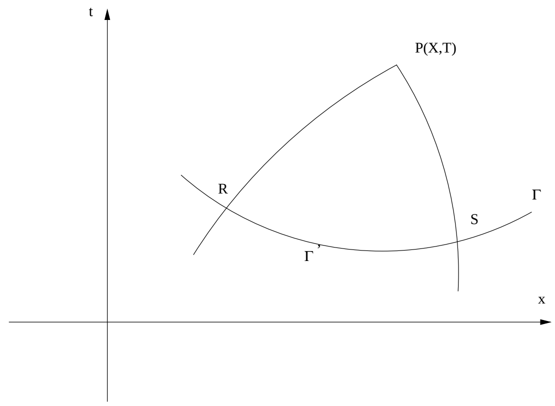


Dominio di dipendenza e regione di influenza

Come mostrato anche nella figura sopra, osserviamo che dato il punto $P(X,T)$ nel piano x,t, il valore corrispondente della funzione $u(X,T)$ è determinato unicamente dai valori delle funzione iniziali nell'intervallo $[X-VT, X+VT]$ dell'asse delle x, i cui estremi sono 'ritagliati' dalle caratteristiche che passano per P. Tale intervallo è detto *dominio di dipendenza.*

Analogamente, il punto $P(X,T)$ determina la soluzione in tutti i punti che stanno nel cono determinato dalle caratteristiche spiccate da tale punto. Matematicamente questo rende il fatto fisico che la propagazione viaggia con velocità finita.

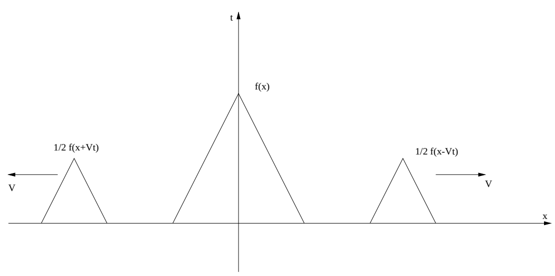
Il discorso precedente non vale solo per le equazioni iperboliche lineari ridotte a forma canonica. Infatti, per una generica equazione iperbolica in due variabili, dato un punto $P(X,T)$ conduciamo le due caratteristiche uscenti da P fino ad intersecare la linea Γ che porta i dati nei punti R e S e sia $\Gamma' \subset \Gamma$ il minimo arco che contiene R e S. In questo caso è Γ' il dominio di dipendenza di P.



Ritornando alla soluzione di D'Alembert, il termine $f(x \pm Vt)$ suggerisce che le onde si propagano lungo le caratteristiche con velocità V. Se poi $g = 0$, allora

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x - Vt) + f(x + Vt)].$$

Da un punto di vista fisico possiamo leggere la soluzione come se il dato iniziale fosse stato 'splittato' in due onde uguali, che hanno la stessa forma della perturbazioni iniziale, ma ampizza ridotta di un fattore un mezzo.

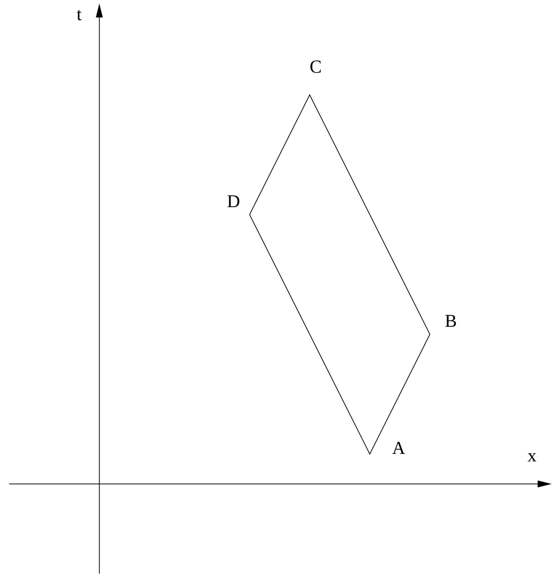


b) - Se descriviamo un fenomeno spazialmente limitato, avremo delle condizioni miste, sia iniziali, sia *al contorno* (in inglese *boundary conditions*, in breve *BC*).

In tal caso torna molto utile la proprietà

$$u(A) + u(C) = u(D) + u(B) \tag{12}$$

dove A, B, C, D sono i vertici indicati in figura.



Mostriamo brevemente la validità della (12). Abbiamo

$$A=(x,t),\quad B=(x+Vs,t+s),\quad C=(x-V\tau+Vs,t+\tau+s),\quad D=(x-V\tau,t+\tau).$$

Quindi

$$u(A)=F(x-Vt)+G(x+Vt),$$

$$u(B)=F(x-Vt)+G(x+Vt+2Vs),$$

$$u(C)=F(x-Vt-2V\tau)+G(x+Vt+2Vs),$$

$$u(D)=F(x-Vt-2V\tau)+G(x+Vt).$$

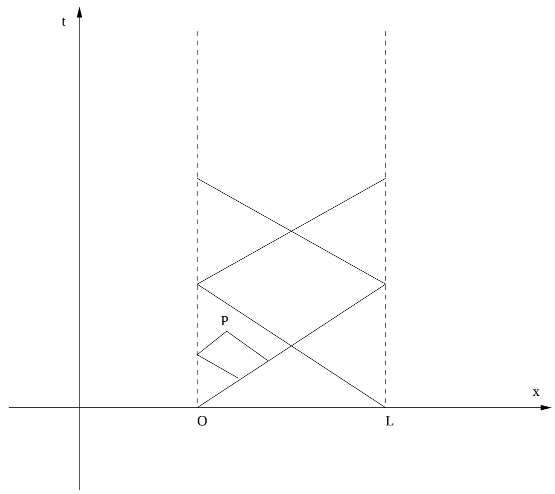
Sommando si conclude.

A questo punto, dopo aver prescritto i dati

$$IC\quad\begin{cases}u(x,0)=f(x),\\ u_t(x,0)=g(x),\quad 0<x<L\end{cases}$$

$$BC\quad\begin{cases}u(0,t)=\alpha(t)\\ u(L,t)=\beta(t),\qquad t>0\end{cases}$$

che determinano la striscia in cui cercare la soluzione, la soluzione stessa è determinata in ogni punto suddividendo la striscia in domini limitati dalle caratteristiche passanti per gli estremi. Infatti è facile vedere che ogni punto P della striscia è vertice di un parallelogramma per il quale la soluzione u è già nota nei restanti vertici, come indicato anche in figura.



Un approccio alternativo (che esamineremo nella prossima sezione) consiste nel determinare la soluzione con ilmetodo di separazione delle variabili, che conduce alla soluzione espressa come somma di una oppotuna serie di Fourier, oppure con il metodo della trasformata di Laplace.

c) - Concludiamo questa breve introduzione all'equazione delle onde considerando il seguente Problema di Cauchy non omogeneo

$$\begin{cases} u_{tt} - V^2 u_{xx} = f \qquad \text{in } \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+, \quad f \in C^0(\mathbf{R} \times \mathbf{R}_+) \\ u(x,0) = \varphi(x) \in C^2(\mathbf{R}) \\ u_t(x,0) = \psi(x) \in C^1(\mathbf{R}). \end{cases}$$

Possiamo utilizzare il Principio di sovrapposizione e vedere $u = z + w$, dove

$$\begin{cases} z_{tt} - V^2 z_{xx} = 0 \\ z(x,0) = \varphi(x) \\ z_t(x,0) = \psi(x), \end{cases} \qquad \begin{cases} w_{tt} - V^2 w_{xx} = f \\ w(x,0) = 0 \\ w_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

Per quanto fatto prima

$$z(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x - Vt) + \varphi(x + Vt)] + \frac{1}{2V} \int_{x-Vt}^{x+Vt} \psi(s)\, ds.$$

Dobbiamo, dunque, risolvere la seconda equazione e determinare w. Al solito, se introduciamo il cambiamento di variabile

$$\begin{cases} \xi = x - Vt \\ \eta = x + Vt \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x = \dfrac{\xi + \eta}{2} \\ t = \dfrac{\eta - \xi}{2V} \end{cases}$$

e teniamo conto che $\partial_t w = -V[\partial_\xi w - \partial_\eta w]$, otteniamo

$$W_{\xi\eta} = -\frac{1}{4V^2} F(\xi, \eta),$$

dove

$$W(\xi,\eta) = w(\frac{\xi+\eta}{2}, -\frac{\xi-\eta}{2V}), \qquad F(\xi,\eta) = f(\frac{\xi+\eta}{2}, -\frac{\xi-\eta}{2V}).$$

Le condizioni iniziali diventano

$$W(s,s) = W_\xi(s,s) = W_\eta(s,s) = 0 \qquad \forall\, s \in \mathbf{R}.$$

Se integriamo rispetto a ξ nell'intervallo (η,ξ) abbiamo

$$W_\eta(\xi,\eta) = -\frac{1}{4V^2}\int_\eta^\xi F(s,\eta)\,ds,$$

dal momento che $W_\eta(\eta,\eta) = 0$. Se ora integriamo nell'intervallo (ξ,η) rispetto a η abbiamo

$$W(\xi,\eta) = -\frac{1}{4V^2}\int_\xi^\eta\int_z^\xi F(s,z)\,dsdz = \frac{1}{4V^2}\int_\xi^\eta\int_\xi^z F(s,z)\,dsdz,$$

dal momento che $W(\xi,\xi) = 0$. Introducendo il cambiamento di variabili

$$-\frac{s-z}{2V} = \tau, \qquad \frac{s+z}{2} = \sigma$$

abbiamo

$$\begin{cases} \xi < z < \eta \\ \xi < s < z \end{cases}$$

ma

$$s = \sigma - Vt, \quad z = \sigma + Vt.$$

Quindi

$$x - Vt = \xi < \sigma - Vt < \sigma + Vt < \eta = x + Vt \quad \Rightarrow \quad x - V(t-\tau) < \sigma < x + V(t-\tau),\ 0 < \tau < t$$

e, tenendo conto che lo jacobiano della trasformazione è $2V$, concludiamo che

$$w(x,t) = \frac{1}{2V}\int_0^t\int_{x-V(t-\tau)}^{x+V(t-\tau)} f(\sigma,\tau)\,d\sigma d\tau.$$

Caso II - Passiamo al caso delle equazioni ellittiche. Cominciamo considerando il caso delle funzioni armoniche, ossia le soluzioni dell'equazione $\Delta u = 0$. Al riguardo abbiamo due fondamentali teoremi

Teorema 1 (della media). - *Sia u armonica in un cerchio aperto di centro (x_0,y_0) e raggio R e continua nel cerchio chiuso. Allora*

$$u(x_0,y_0) = \frac{1}{2\pi R}\int_{C_R(x_0,y_0)} u(x,y)\,ds.$$

Teorema 2 (di monotonia per le funzioni armoniche). - *Sia u armonica in un insieme $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ aperto, limitato e connesso e continua in $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Se u non è costante in Ω, essa assume il valore massimo M e il valore minimo m su $\partial\Omega$.*

Osservazione. - Si badi che M e m esistono certamente perchè u è continua in $\bar{\Omega}$ ∎.

Passiamo, ora, a considerare le equazioni ellittiche generali. Per esse hanno particolare importanza i problemi cosiddetti di Dirichlet e di Neumann, consistenti nell'assegnare sulla frontiera di un aperto Ω il valore di u oppure il valore della derivata nnormale di u $\frac{\partial u}{\partial n}$.

Distinguiamo, poi, fra tutte le equazioni ellittiche (non necessariamente in due variabili), l'equazione di Laplace

$$\Delta u = 0 \qquad \text{in } \Omega,$$

e l'equazione di Poisson

$$\Delta u = f \qquad \text{in } \Omega.$$

Osservazione. - Come già detto nella Sezione 6, per le equazioni ellittiche il Problema di Cauchy in generale non è ben posto. A titolo d'esempio consideriamo infatti il problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \qquad \text{in } \Omega = \mathbf{R} \times]0, +\infty[\\ u(x,0) = \dfrac{\cos nx}{n} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 0. \end{cases}$$

Non è difficile verificare che la soluzione è data dalla funzione

$$u_n(x,y) = \frac{1}{n} \cos nx \cosh ny.$$

Tale soluzione è, inoltre, unica. Supponiamo, ora, che $n \to +\infty$. Conseguentemente $u(x,0) \to 0$. In corrispondenza delle nuove condizioni iniziali otteniamo la nuova soluzione

$$u(x,y) = 0 \qquad \text{in } \mathbf{R} \times [0, +\infty[.$$

Se vi fosse dipendenza continua, dovremmo avere

$$\lim_{n \to +\infty} u_n(x,y) = 0,$$

almeno in un intorno sufficientemente piccolo di $y = 0$. Tuttavia, se scegliamo la retta $x = 0$ (lungo la quale $\cos nx = 1$) è immediate verificare che

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\cosh ny}{y} = +\infty \quad ∎.$$

La proprietà di monotonia enunciata prima per le funzioni armoniche vale in realtà per tutte le soluzioni di equazioni ellittiche omogenee molto più generali. Abbiamo infatti

Teorema 3 (di monotonia per le equazioni ellittiche). - *Sia $u(x,y)$ una soluzione in $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ aperto, limitato e connesso con bordo regolare dell'equazione*

$$a\,u_{xx} + 2b\,u_{xy} + c\,u_{yy} + 2d\,u_x + 2e\,u_y + 2f\,u = 0$$

con $b^2 - ac < 0$ e $f \geq 0$ in tutto Ω. Supponiamo, inoltre, che u sia continua in tutto $\Omega \cup \partial\Omega$. Allora, se u non è costante in Ω, assume il valore massimo M ed il valore minimo m su $\partial\Omega$.

Dal Teorema 3 di monotonia segue l'unicità della soluzione per il Problema di Dirichlet ed anche la dipendenza continua della soluzione dai dati iniziali per lo stesso problema.

Per lo studio delle equazioni di Laplace e Poisson e dei relativi problemi di Dirichlet e di Neumann, risulta particolarmente utile la cosiddetta I Formula di Green.

Ricordiamo che se $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ è un aperto regolare abbiamo

$$\int_\Omega v \Delta u\, dx = \int_\Omega v\, \mathrm{div} \nabla u\, dx =$$

$$= \int_{\partial\Omega} v\, \nabla u \cdot n\, dS - \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla u\, dx. \tag{13}$$

Consideriamo, dunque, i due problemi

$$(D) \begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega \subset \mathbf{R}^2 \\ u|_{\partial\Omega} = g, \end{cases} \qquad (N) \begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega \subset \mathbf{R}^2 \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega} = h. \end{cases}$$

Se nella (13) poniamo $v = u$, nel caso del problema (D) abbiamo

$$\int_\Omega f u\, dx = -\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx + \int_{\partial\Omega} g \frac{\partial u}{\partial n}\, dS \tag{14}$$

Se, quindi, $f = g = 0$, ricaviamo

$$\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx = 0 \qquad \Rightarrow \qquad u = cost.$$

Poichè evidentemente $u = g$, otteniamo $u = 0$ e questo ci dà l'unicità della soluzione per il Problema (D).

Quanto al Problema (N), se poniamo $v = 1$, ricaviamo

$$\int_\Omega f\, dx = \int_{\partial\Omega} h\, dS$$

che è la cosiddetta *condizione di compatibilità* per i problemi di Neumann.

Infine se u_1 e u_2 sono due soluzioni dello stesso (N), la loro differenza $w = u_1 - u_2$ soddisfa

$$\begin{cases} \Delta w = 0 \quad \text{in } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

e dalla prima formula di Green otteniamo con $u = v = w$

$$0 = -\int_\Omega |\nabla w|^2 \, dx \qquad \Rightarrow \qquad w = cost.$$

Concludiamo, dunque, che $u_1 - u_2 = cost$, ossia il problema (N) ha infinite soluzioni (come peraltro ovvio) che differiscono tutte fra di loro a meno di una costante.

Caso III - Concludiamo questa trattazione con le equazioni paraboliche. Abbiamo già ampiamente sottolineato che per le equazioni paraboliche del secondo ordine esiste una sola famiglia di linee caratteristiche. L'esempio più tipico di equazione parabolica è la cosiddetta equazione del calore

$$u_t - u_{xx} = F(x,t).$$

Anche se in termini del tutto impropri, possiamo pensare di averla ottenuta dall'equazione iperbolica

$$u_{tt} - V^2 u_{xx} = F(x, t, u, u_x, u_t)$$

mandando $V \to +\infty$. Poichè le linee caratteristiche per l'equazione iperbolica sono

$$x \pm Vt = cost \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{V} \pm t = cost,$$

è chiaro che per l'equazione parabolica le linee caratteristiche saranno $t = 0$. Passando, poi, al dominio di dipendenza o, che è lo stesso, all'interpretazione delle caratteristiche come fronti d'onda, è facile rendersi conto che i valori della u in un qualsiasi punto della retta $t = 0$ influenzano la u per $t > 0$. Abbiamo, dunque, fenomeni nei quali la perturbazione si propaga con velocità infinita.

Un problema classico, cosiddetto di Cauchy - Dirichlet, consiste nel cercare u tale che

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = F(x,t) \\ u(x,0) = \varphi(x) \qquad 0 \le x \le L \\ u(0,t) = \alpha(t) \qquad 0 < t \le T \\ u(L,t) = \beta(t) \qquad 0 < t \le T. \end{cases}$$

Nel caso di $F = 0$ vale il seguente

Teorema 4 (di monotonia per l'equazioni paraboliche). - *Se u è soluzione del Problema di Cauchy - Dirichlet nel rettangolo $[0, L] \times [0, T]$, allora il massimo M ed il minimo m di u sono assunti sul bordo del rettangolo privato del lato superiore.*

Senza entrare adesso nei dettagli, osserviamo che da questo Teorema, come nel caso ellittico, si deducono l'unicità della soluzione e la dipendenza continua della stessa dai dati φ, α, β.