APPELLO DI ANALISI MATEMATICA C DEL 7 APRILE 2011

COGNOME e NOME NUMERO DI MATRICOLA

1) Si consideri l'equazione $f(x,y) = 0$ definita da

$$x^2 - xy + y^2 - x + y - 1 = 0.$$

Verificare che essa è univocamente risolubile rispetto a $y$ in un intorno del punto $P(1,1)$. Disegnare, quindi, in un intorno di $P$ un grafico qualitativo della funzione definita implicitamente.

2) Si consideri la funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $2\pi$–periodica, **pari**, definita da

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} - t & \text{se} \quad 0 < t \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{se} \quad \dfrac{\pi}{2} < t \le \pi. \end{cases}$$

a) Disegnare il grafico della $f$.
b) Verificare che la $f$ è sviluppabile in serie di Fourier.
c) Scrivere esplicitamente tale sviluppo.
d) Discutere la convergenza della serie alla funzione.
e) Utilizzando i risultati del punto precedente, determinare la somma della serie numerica $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$.

3) Determinare l'integrale particolare soluzione del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} \underline{y}' = \mathbb{A}\underline{y} + \underline{b} \\ \underline{y}(0) = \underline{y}_o, \end{cases} \quad \text{dove} \quad \mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} 2x \\ -\sin x \end{bmatrix}, \qquad \underline{y}_o = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

4) Si consideri $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, definita da

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2.$$

Determinare massimo e minimo aassoluto della $f$ nel dominio

$$T = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \quad 2x - 1 \le y \le 1 - 2x, \quad x \ge -1\}.$$