FACOLTÀ DI INGEGNERIA

NOTE DI SOSTEGNO

AL CORSO DI ANALISI MATEMATICA C

A.A. 2007/08

Docente: B. Ferrario

Istruzioni per l'uso

Lo scopo di queste note è di presentare in maniera precisa e inequivocabile enunciati e dimostrazioni di teoremi (o affini). Le note non vogliono in ogni caso sostituire i libri di testo. Infatti sono incomplete, dato che riguardano solo alcuni aspetti del materiale presentato durante il corso (le modalità d'esame prevedono che "lo Studente deve saper risolvere *esercizi*, conoscere *definizioni* ed *enunciati* come da elenco dettagliato del programma e le seguenti *dimostrazioni*: ..."). Si invitano pertanto gli Studenti a non basarsi solo su queste note per studiare l'Analisi; nella pagina seguente c'è l'elenco dei testi consigliati.

Nonostante tale parzialità si è deciso di scrivere queste note per dare allo Studente un punto di riferimento per lo studio, non essendoci ancora testi di studio appositamente preparati per i nuovi programmi. L' esperienza del corso svolto gli anni passati mostra che talvolta lo Studente studia solo sugli appunti presi a lezione, ma questi possono contenere imprecisioni o falsità. Ecco quindi il motivo che spinge a scrivere queste note: dare gli enunciati completi e corretti delle proprietà che sono state dimostrate durante il corso.

Ringrazio fin d'ora gli Studenti che vorranno segnalarmi errori o imprecisioni.

1 Calcolo delle Variazioni

Sia dato il funzionale

$$\Phi(y) = \int_{x_0}^{x_1} F\big(x, y(x), y'(x)\big)\, dx$$

dove $F : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ (in pratica basterà che x vari in un intervallo $[x_0, x_1]$ mentre per y ci saranno eventuali restrizioni, cioè Ω sarà un sottoinsieme della striscia di piano $[x_0, x_1] \times \mathbb{R}$). Supposto $F \in C^1(\Omega \times \mathbb{R})$, si vuole minimizzare il funzionale $\Phi(y)$ nella classe di funzioni

$$y \in Y = \{y \in C^1([x_0, x_1]) : \big(x, y(x)\big) \in \Omega \quad \forall x \in [x_0, x_1], y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1\}$$

Analogamente allo studio del valore minimo di una funzione, si cercano dapprima i minimi relativi. Poi, si analizza se il funzionale Φ è limitato inferiormente (cioè se non assume valori negativi arbitrariamente grandi in valore assoluto) e si determina (se esiste) il minimo assoluto, confrontando i valori dei minimi relativi. Nello stesso modo si procede nella ricerca del massimo del funzionale dato.

Per definire una linea di minimo relativo, occorre prima definire un intorno di una linea.
Date due linee continue $f, g \in C^0([x_0, x_1])$, si chiama *distanza* tra le due linee un numero non negativo d uguale al massimo di $|f(x) - g(x)|$ nell'intervallo $[x_0, x_1]$:

$$d[f(x), g(x)] = \max_{x_0 \le x \le x_1} |f(x) - g(x)|$$

Data una linea $y(x) \in C^0([x_0, x_1])$, un suo *intorno* $\mathcal{U}(y, \rho)$ di raggio $\rho > 0$ è definito dall'insieme di tutte le linee $v \in C^0([x_0, x_1])$ che hanno distanza da y inferiore a ρ:

$$\mathcal{U}(y, \rho) = \left\{ v = v(x) : \max_{x_0 \le x \le x_1} |v(x) - y(x)| < \rho \right\}$$

o equivalentemente

$$\mathcal{U}(y, \rho) = \{v = v(x) : |v(x) - y(x)| < \rho \quad \forall x \in [x_0, x_1]\}$$

`Definizione`: Sia $\Phi : Y \to \mathbb{R}$. Si dice che la linea $y \in Y$ è linea di *minimo relativo* (*massimo relativo*) per il funzionale Φ se

$$\exists\, \mathcal{U}(y, \rho) : \quad \Phi(v) \underset{(\le)}{\ge} \Phi(y) \qquad \forall v \in Y \cap \mathcal{U}(y, \rho)$$

Si tratta di confrontare il valore del funzionale su linee v vicine a y. Definiamo *variazione* (o incremento) δy dell'argomento $y(x)$ del funzionale $\Phi(y(x))$ la differenza tra due funzioni $y(x)$ e $v(x)$ appartenenti alla classe di funzioni Y considerata:

$$\delta y(x) = y(x) - v(x)$$

Se $y, v \in C^k([x_0, x_1])$ allora anche la variazione è derivabile k volte e $\frac{d^k}{dx^k}\delta y = \delta \frac{d^k y}{dx^k}$.
`Terminologia`: le linee di minimo o massimo relativo per il funzionale Φ sono dette <u>linee estremanti</u>.

TEOREMA (C.N. perché la linea y sia estremante per il funzionale $\mathbf{\Phi(y)}$)
Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$*;*

$F : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *con* $F \in C^1(\Omega \times \mathbb{R})$.

Se $y \in Y$ *è una linea estremante per il funzionale* $\Phi(y) = \int_{x_0}^{x_1} F\big(x, y(x), y'(x)\big)\, dx$*, allora la variazione prima* $\delta\Phi(h)$ *del funzionale relativa alla variazione* $\delta y = h$ *del suo argomento si annulla per ogni variazione ammissibile* h *sufficientemente piccola, cioè*

$$\int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial F}{\partial y}\big(x, y(x), y'(x)\big) h(x) + \frac{\partial F}{\partial y'}\big(x, y(x), y'(x)\big) h'(x) \right] dx = 0 \tag{1}$$

per ogni variazione ammissibile h *sufficientemente piccola.*

`Osservazione.` Il teorema afferma che condizione necessaria perché y sia linea di minimo o massimo relativo per il funzionale $\Phi(y)$ è che la variazione prima $\delta\Phi(h)$ del funzionale si annulli per ogni variazione ammissibile $\delta y = h$ opportunamente piccola. Tale condizione non è sufficiente.

Dimostrazione
Supponiamo che la linea $y \in Y$ sia di minimo relativo per il funzionale Φ.
Per ipotesi sappiamo che esiste un intorno $\mathcal{U}(y, \rho)$ di y tale che

$$\Phi(y) \leq \Phi(v) \qquad \forall v \in Y \cap \mathcal{U}(y, \rho) \tag{2}$$

dove $\mathcal{U}(y, \rho) = \{ v : |y(x) - v(x)| < \rho \quad \forall x \in [x_0, x_1] \}$.
Fissiamo ora una particolare variazione ammissibile h, cioè una funzione $h \in C^1([x_0, x_1])$ con $h(x_0) = 0, h(x_1) = 0$, $\max\limits_{x \in [x_0, x_1]} |h(x)| < \rho$ (quest'ultima condizione dice che h è sufficientemente piccola). Allora tutte le linee

$$v = y + th, \qquad t \in [-1, +1]$$

appartengono all'intorno $\mathcal{U}(y, \rho)$. Infatti

$$|y(x) - v(x)| = | - th(x)| \leq |h(x)| < \rho \qquad \forall x \in [x_0, x_1]$$

Per questa scelta di v, la (2) diventa

$$\Phi(y) \leq \Phi(y + th) \qquad \forall t \in [-1, +1] \tag{3}$$

Posto $\psi(t) = \Phi(y + th)$ (con y e h funzioni fissate e t variabile reale - così si definisce la funzione $\psi : [-1, +1] \to \mathbb{R}$), dalla (3) si ha che

$$\psi(0) \leq \psi(t) \qquad \forall t \in [-1, +1]$$

cioè il punto $t = 0$ è punto di minimo (assoluto) per ψ. Date le ipotesi di regolarità per F e y nell'intervallo chiuso $[x_0, x_1]$ (così che vale il teorema di derivazione sotto il segno di integrale), si ha che $\psi \in C^1([x_0, x_1])$ e

$$\psi'(t) = \frac{d}{dt} \int_{x_0}^{x_1} F\big(x, y(x) + th(x), y'(x) + th'(x)\big)\, dx = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial}{\partial t} F\big(x, y(x) + th(x), y'(x) + th'(x)\big)\, dx$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial F}{\partial y}\big(x, y(x) + th(x), y'(x) + th'(x)\big) h(x) + \frac{\partial F}{\partial y'}\big(x, y(x) + th(x), y'(x) + th'(x)\big) h'(x) \right] dx$$

Essendo $t = 0$ punto di minimo per $\psi(t)$, deve valere

$$\psi'(0) = 0$$

cioè

$$\int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial F}{\partial y}\big(x, y(x), y'(x)\big)h(x) + \frac{\partial F}{\partial y'}\big(x, y(x), y'(x)\big)h'(x) \right] dx = 0 \tag{4}$$

A questo punto, considerando come variazione h una qualsiasi variazione ammissibile e ripetendo quando fatto sopra, si trova la tesi, cioè che (4) vale per ogni variazione ammissibile h. $\square$

Sotto ipotesi di maggiore regolarità della funzione F e delle linee estremanti y, si può riformulare la condizione necessaria in una maniera "più utile" per la ricerca delle linee estremanti. Infatti vale il seguente risultato

EQUAZIONE di EULERO

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$*;*

$F : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *con* $F \in C^2(\Omega \times \mathbb{R})$.

Se $y \in Y \cap C^2([x_0, x_1])$ *è una linea estremante per il funzionale* $\Phi(y) = \int_{x_0}^{x_1} F\big(x, y(x), y'(x)\big)\, dx$, *allora* $y = y(x)$ *soddisfa la seguente equazione, detta equazione di Eulero*

$$\frac{\partial F}{\partial y}\big(x, y(x), y'(x)\big) - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\big(x, y(x), y'(x)\big) = 0 \tag{5}$$

e le condizioni ai limiti $y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1$.

`Osservazione.` Nel caso in cui F e $y \in C^2$, l'equazione (5) scritta in forma estesa è

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'} - \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'}\, y' - \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\, y'' = 0$$

a cui si associano le condizioni ai limiti $y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1$.

Ecco perché si richiede l'esistenza e la continuità delle derivate seconde ($F \in C^2, y \in C^2$).

Ricordiamo che un problema ai limiti non sempre ha una soluzione e se una soluzione esiste, essa può non essere unica.

`Terminologia`: le soluzioni dell'equazione di Eulero (5) sono dette <u>linee estremali</u> del funzionale Φ.

Dimostrazione

Dato che le ipotesi sono più forti di quelle del teorema precedente, vale la tesi del suddetto teorema e quindi abbiamo che

$$\int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial F}{\partial y}\big(x, y(x), y'(x)\big)h(x) + \frac{\partial F}{\partial y'}\big(x, y(x), y'(x)\big)h'(x) \right] dx = 0 \tag{6}$$

per ogni variazione ammissibile h sufficientemente piccola.
Integrando per parti l'integrale dato dal secondo addendo, si ha

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F}{\partial y'}\big(x, y(x), y'(x)\big) h'(x)\, dx$$

$$= \left[\frac{\partial F}{\partial y'}\big(x, y(x), y'(x)\big) h(x)\right]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\big(x, y(x), y'(x)\big)\ h(x)\, dx \quad (7)$$

Dato che la funzione h si annulla agli estremi, il primo termine a destra del segno di "$=$" si annulla. Sostituendo nell'espressione (6), si ottiene

$$\int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial F}{\partial y}\big(x, y(x), y'(x)\big) - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\big(x, y(x), y'(x)\big)\right] h(x)\, dx = 0$$

per ogni variazione ammissibile h sufficientemente piccola. Grazie al lemma che verrà dimostrato in seguito (con le notazioni del lemma, poniamo $G(x) = \frac{\partial F}{\partial y}\big(x, y(x), y'(x)\big) - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\big(x, y(x), y'(x)\big)$), si ha che la funzione integranda si deve annullare:

$$\frac{\partial F}{\partial y}\big(x, y(x), y'(x)\big) - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\big(x, y(x), y'(x)\big) = 0$$

□

Rimane da dimostrare il seguente risultato.

LEMMA fondamentale del calcolo delle variazioni
Sia data una funzione $G \in C^0([x_0, x_1])$.
Se

$$\int_{x_0}^{x_1} G(x)h(x)\, dx = 0 \qquad \textit{per ogni funzione } h \in C^1([x_0, x_1]) \quad (8)$$

allora si ha che

$$G(x) = 0 \qquad \textit{per ogni } x \in [x_0, x_1]$$

La tesi rimane vera se h è soggetta a soddisfare almeno una ulteriore condizione del tipo: $h \in C^k([x_0, x_1])$ (con k intero non negativo) oppure $h(x_0) = 0$ oppure $h(x_1) = 0$ oppure $\max\limits_{x\in[x_0,x_1]} |h(x)| < \rho$.

Dimostrazione
Dimostriamo il teorema per assurdo. Si tratta di negare la tesi e mostrare che ciò è in contraddizione con l'ipotesi. Sia $\overline{x} \in [x_0, x_1]$ un punto in cui la funzione G non si annulla:

$$G(\overline{x}) \neq 0$$

Dato che G è funzione continua, per il teorema della permanenza del segno esiste un intorno I del punto $\overline{x}$ in cui $G(x)$ ha lo stesso segno di $G(\overline{x})$. Supponiamo $G(\overline{x}) > 0$ (nulla cambierebbe nel ragionamento se $G(\overline{x}) < 0$, salvo i dettagli tecnici); si ha dunque

$$\exists I \ni \overline{x} : G(x) > 0 \qquad \forall x \in I$$

Denotiamo $I = [a,b]$ l'intorno in questione. Scegliamo ora una funzione $h(x) : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$, definendola così:

$$h(x) = \begin{cases} (x-a)^2(x-b)^2, & \text{se } x \in [a,b] \\ 0, & \text{se } x \notin [a,b] \end{cases}$$

Si ha che $h \in C^1([x_0, x_1])$, cioè questa funzione h soddisfa l'ipotesi. Inoltre $h(x) > 0$ per $x \in]a,b[$, mentre $h(x) = 0$ per gli altri valori di x.
Valutiamo l'integrale che compare nell'ipotesi (8) e otteniamo

$$\int_{x_0}^{x_1} G(x)h(x)\,dx = \int_a^b G(x)h(x)\,dx > 0$$

Il segno positivo è dovuto al fatto che in $]a,b[$ la funzione integranda $G(x)h(x)$ è strettamente positiva.
Ma ciò è contro l'ipotesi (8), che richiede che tale integrale si annulli. Si è quindi giunti ad un assurdo. Dunque non si può negare la tesi e così il lemma è dimostrato.
Nel caso in cui si richiedano condizioni ulteriori per le funzioni di prova h, come specificato nell'ultima parte dell'enunciato, la dimostrazione procede in maniera analoga, con ovvie modifiche (si invita lo Studente a trovare una funzione h per ciascuno dei casi elencati, osservando anche che la funzione h costruita nella dimostrazione soddisfa i vincoli $h(x_0) = h(x_1) = 0$). $\square$

In seguito useremo il lemma fondamentale del calcolo delle variazioni in una forma leggermente diversa, richiedendo che l'ipotesi (8) valga per ogni funzione $h \in C^2([x_0, x_1])$. Si invita lo Studente a modificare opportunamente la dimostrazione per tale caso.

Torniamo alla studio delle linee y di massimo/minimo per il funzionale $\Phi(y)$. Con la **condizione necessaria** si determinano le linee estremali; tra queste linee vogliamo ora determinare quali sono di massimo relativo e quali di minimo relativo per il dato funzionale. Dunque, analizziamo delle **condizioni sufficienti** per l'esistenza di linee estremanti.
Iniziamo con alcune definizioni.
Una famiglia di curve $y = y(x, C)$ forma un *campo* in un dominio Ω del piano (x, y) se per ogni punto di Ω passa una ed una sola linea della famiglia $y = y(x, C)$.
Il coefficiente angolare $p(x, y)$ della tangente a una linea della famiglia $y = y(x, C)$ passante per il punto (x, y) si chiama *inclinazione* del campo nel punto (x, y).
La famiglia di linee $y = y(x, C)$ forma un *campo centrale* nel dominio Ω se queste linee coprono tutto Ω, non si intersecano e divergono da un punto (a, b) giacente all'esterno o al bordo del dominio Ω. Il punto (a, b) è detto *centro* del fascio di linee.
Se un campo è formato da una famiglia di linee estremali di un certo problema variazionale, esso è detto *campo di estremali.*
Interessa considerare solo domini aperti Ω semplicemente connessi, cioè tali che ogni curva regolare chiusa contenuta in Ω può essere deformata con continuità fino a ridursi ad un punto (o equivalentemente, due curve regolari qualsiasi contenute in Ω e aventi estremi coincidenti possono essere deformate una nell'altra con continuità in Ω).

Con queste premesse possiamo enunciare il seguente risultato:
TEOREMA (C.S. di Legendre perché la linea y sia estremante per il fun-

zionale $\Phi(\mathbf{y})$)
Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$,
$F : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *con* $F \in C^2(\Omega \times \mathbb{R})$,
Γ *una linea estremale per il funzionale* $\Phi(y) = \int_{x_0}^{x_1} F\big(x, y(x), y'(x)\big)\, dx$ *con le condizioni al contorno* $y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1$.
Se
i) tale estremale può essere inclusa in un campo (o campo centrale) di estremali,
ii) $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}(x, v, z)$ *non cambia di segno in tutti i punti* (x, v) *vicini all'estremale* Γ *e per*
qualsiasi valore di z,
allora la linea estremale Γ *è linea estremante.*
In particolare, se $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \geq 0$ *si ha un minimo relativo, se* $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \leq 0$ *si ha un massimo relativo.*

Essendo una condizione sufficiente, si ha che se almeno una delle due ipotesi non è soddisfatta, non si può concludere nulla circa la validità della tesi.

[Questo teorema è conseguenza di un altro risultato. Riportiamo i dettagli per lo Studente interessato.
Studiamo il segno $\Phi(v) - \Phi(y)$, dove y è una linea estremale inclusa in un campo (o campo centrale) di estremali. Se definiamo il funzionale ausiliario

$$\Psi(v) = \int_{x_0}^{x_1} [F(x, v(x), p(x, v(x))) + (v'(x) - p(x, v(x)))\, \frac{\partial F}{\partial y'}(x, v(x), p(x, v(x)))]\, dx$$

si può dimostrare che $\Phi(y) = \Psi(v)$ (la dimostrazione è per es. in Elsgolts "Equazioni differenziali e calcolo delle variazioni", Ed. MIR, capitolo 8). Così si ha

$$\Phi(v) - \Phi(y) = \int_{x_0}^{x_1} \big[F(x, v(x), v'(x)) - F(x, v(x), p(x, v(x))) \\ - (v'(x) - p(x, v(x)))\, \frac{\partial F}{\partial y'}(x, v(x), p(x, v(x)))\big]\, dx$$

Il segno di $\Phi(v) - \Phi(y)$ dipende dal degno delle funzione integranda. Allora definiamo la *funzione di Weierstrass*

$$E(x, v, p, v') = F(x, v, v') - F(x, v, p) - (v' - p)\, \frac{\partial F}{\partial y'}(x, v, p)$$

dove $p = p(x, v)$ è l'inclinazione del campo di estremali del problema variazionale nel punto (x, v).
Vale il seguente risultato:
TEOREMA (C.S. di Weierstrass perché la linea y sia estremante per il funzionale $\Phi(\mathbf{y})$)
Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$*;*
$F : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *con* $F \in C^1(\Omega \times \mathbb{R})$*;*
Γ *una linea estremale per il funzionale* $\Phi(y) = \int_{x_0}^{x_1} F\big(x, y(x), y'(x)\big)\, dx$ *con le condizioni al contorno* $y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1$.
Se
i) tale estremale può essere inclusa in un campo (o campo centrale) di estremali,
ii) la funzione di Weierstrass $E(x, v, p, v')$ *non cambia di segno in tutti i punti* (x, v) *vicini all'estremale* Γ *e per qualsiasi valore di* v',
allora la linea estremale Γ *è linea estremante.*
In particolare, se $E \geq 0$ *si ha un minimo relativo, se* $E \leq 0$ *si ha un massimo relativo.*

Si può dimostrare che, nella seguente versione, la condizione di Weierstrass è necessaria: se $y = u(x) \in C^1([x_0, x_1])$ è linea di minimo relativo, si ha $E(x, u(x), p, u'(x)) \geq 0$ per ogni $x \in [x_0, x_1]$ e per ogni $p \in \mathbb{R}$. Analogamente nel caso di massimo relativo. Quindi, se in un campo contenente l'estremale Γ la funzione E ha segni opposti nei punti dell'estremale per certi valori di p, non si ha un'estremante. (Lo Studente interessato trova la dimostrazione per es. in Cesari "Optimization-Theory and applications", Ed. Springer, pagine 69-70.)

Osserviamo che la funzione di Weierstrass è la differenza tra $F(x,v,v')$ e il polinomio di Taylor del primo ordine centrato in p per tale F funzione della sola variabile y'. Sotto ipotesi di regolarità, si può scrivere tale differenza con il resto in forma di Lagrange:

$$F(x,v,v') - F(x,v,p) - (v'-p)\frac{\partial F}{\partial y'}(x,v,p) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}(x,v,z)(v'-p)^2$$

dove z è un opportuno valore compreso tra v' e p. Dunque, il segno della funzione di Weierstrass $E(x,v,p,v')$ dipende solo dal segno della derivata seconda $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}$ e da ciò segue il teorema di Legendre.]

Consideriamo ora diverse condizioni ai limiti oppure diversi funzionali. Ci proponiamo di studiare la condizione necessaria per l'esistenza di estremanti. Supponiamo fin d'ora che le estremali e la funzione F siano sufficientemente regolari per dar senso a quanto segue ($y, F \in C^k$ per k opportuni).

1.1 C.N. per altre condizioni ai limiti o con vincoli

Osserviamo innanzitutto che per funzionali del tipo $\Phi(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))\,dx$ la condizione necessaria $\delta\Phi(h) = 0$ per ogni variazione ammissibile h opportunamente piccola continua a valere. L'argomentazione ulteriore da cui si ottiene il problema ai limiti per l'equazione di Eulero invece dipende dalle condizioni ai limiti.

• **Estremi liberi**

Consideriamo lo spazio delle funzioni ammissibili

$$\tilde{Y} = \{y \in C^1([x_0,x_1]) : \big(x, y(x)\big) \in \Omega \quad \forall x \in [x_0,x_1]\}$$

Non ci sono condizioni di passaggio per punti assegnati: gli estremi della linea y giacciono sulle rette $x = x_0$ e $x = x_1$. Osserviamo che $\tilde{Y} \supset Y$.; inoltre, se h è variazione ammissibile in Y allora lo è pure in $\tilde{Y}$. Ne segue che deve valere l'equazione di Eulero, cioè la linea y è una soluzione dell'equazione differenziale

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

Scriviamo la condizione necessaria $\delta\Phi(h) = 0$ per ogni variazione ammissibile h sufficientemente piccola, ricordando i conti di integrazione per parti in (7)

$$\begin{aligned}\delta\Phi(h) = &\int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial F}{\partial y}\big(x, y(x), y'(x)\big) - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\big(x, y(x), y'(x)\big)\right] h(x)\,dx \\ &+ \frac{\partial F}{\partial y'}\big(x_1, y(x_1), y'(x_1)\big)h(x_1) - \frac{\partial F}{\partial y'}\big(x_0, y(x_0), y'(x_0)\big)h(x_0)\end{aligned} \tag{9}$$

La funzione da integrare è nulla, poiché vale l'equazione di Eulero e dunque l'espressione della variazione prima diventa

$$\delta\Phi(h) = \frac{\partial F}{\partial y'}\big(x_1, y(x_1), y'(x_1)\big)h(x_1) - \frac{\partial F}{\partial y'}\big(x_0, y(x_0), y'(x_0)\big)h(x_0)$$

e deve essere (C.N.): $\delta\Phi(h) = 0$ per ogni variazione ammissibile h sufficientemente piccola.
Considerando ora tutte le variazioni ammissibili per cui $h(x_0) = 0$, l'uguaglianza sopra diventa

$$\delta\Phi(h) = \frac{\partial F}{\partial y'}\big(x_1, y(x_1), y'(x_1)\big)h(x_1) = 0 \qquad \forall \text{ “piccola” } h \in C^1 : h(x_0) = 0$$

ed è soddisfatta solo se

$$\frac{\partial F}{\partial y'}\big(x_1, y(x_1), y'(x_1)\big) = 0$$

Analogamente, considerando tutte le variazioni ammissibili “piccole” per cui $h(x_1) = 0$, si ha che $\delta\Phi(h) = 0$ solo se

$$\frac{\partial F}{\partial y'}\big(x_0, y(x_0), y'(x_0)\big) = 0$$

In conclusione, per il problema con estremi liberi, la C.N. è data dal seguente problema ai limiti

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial y}\big(x, y(x), y'(x)\big) - \dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial F}{\partial y'}\big(x, y(x), y'(x)\big) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y'}\big(x_0, y(x_0), y'(x_0)\big) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y'}\big(x_1, y(x_1), y'(x_1)\big) = 0 \end{cases}$$

• Un estremo libero e un estremo vincolato
Supponiamo che lo spazio delle funzioni ammissibili sia

$$\overline{Y} = \{y \in C^1([x_0, x_1]) : \big(x, y(x)\big) \in \Omega \quad \forall x \in [x_0, x_1], y(x_0) = y_0\}$$

cioè la linea y ha un estremo fisso ($y(x_0) = y_0$) e un estremo libero (giace sulla retta $x = x_1$).
Le variazioni ammissibili sono

$$h \in C^1([x_0, x_1]) \text{ “piccola” } : h(x_0) = 0$$

Ripetendo il procedimento del caso precedente, si ottiene che la C.N. per l'esistenza di linee estremanti è

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial y}\big(x, y(x), y'(x)\big) - \dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial F}{\partial y'}\big(x, y(x), y'(x)\big) = 0 \\ y(x_0) = y_0 \\ \frac{\partial F}{\partial y'}\big(x_1, y(x_1), y'(x_1)\big) = 0 \end{cases}$$

• Funzionali con vincoli
Si vuole minimizzare il funzionale $\Phi(y) = \int_{x_0}^{x_1} F\big(x, y(x), y'(x)\big)\,dx$ col vincolo $K(y) = \int_{x_0}^{x_1} G\big(x, y(x), y'(x)\big)\,dx = 0$, dove $G \in C^1(\Omega \times \mathbb{R})$. Si tratta di un problema di minimo vincolato, dove il minimo si cerca nello spazio delle funzioni ammissibili
$Y = \{y \in C^1([x_0, x_1]) : \big(x, y(x)\big) \in \Omega \quad \forall x \in [x_0, x_1], y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1\}$

col vincolo $\int_{x_0}^{x_1} G\big(x, y(x), y'(x)\big)\, dx = 0$. Analogamente a quanto fatto per le funzioni, si definisce il funzionale ausiliario ($\lambda \in \mathbb{R}$ è il moltiplicatore di Lagrange)

$$L_\lambda(y) = \Phi(y) + \lambda K(y) \equiv \int\limits_{x_0}^{x_1} \Big[F\big(x, y(x), y'(x)\big) + \lambda G\big(x, y(x), y'(x)\big)\Big]\, dx$$

che è un nuovo funzionale in cui la funzione da integrare è $F\big(x, y(x), y'(x)\big) + \lambda G\big(x, y(x), y'(x)\big)$. Si ripete il procedimento svolto nel primo caso base per la ricerca di linee estremanti (le variazioni ammissibili sono $h \in C^1([x_0, x_1]) : h(x_0) = 0, h(x_1) = 0$). Si trova che, supposto che $y(x)$ è linea estremante per il funzionale $\Phi(y)$ ma $y(x)$ non è linea estremale per il funzionale $K(y)$, esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che il funzionale $L_\lambda(y)$ ha variazione prima nulla, cioè l'equazione di Eulero per questo problema e le associate condizioni sono

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial y}\big(x, y(x), y'(x)\big) + \lambda \dfrac{\partial G}{\partial y}\big(x, y(x), y'(x)\big) - \dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial F}{\partial y'}\big(x, y(x), y'(x)\big) - \lambda \dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial G}{\partial y'}\big(x, y(x), y'(x)\big) = 0 \\ y(x_0) = y_0 \\ y(x_1) = y_1 \\ \int_{x_0}^{x_1} G\big(x, y(x), y'(x)\big)\, dx = 0 \end{cases}$$

1.2 C.N. per altri funzionali

• Funzionali in cui compare $\mathbf{y''}$

Consideriamo funzionali dipendenti anche dalla derivata seconda:

$$\Phi(y) = \int_{x_0}^{x_1} F\big(x, y(x), y'(x), y''(x)\big)\, dx$$

con $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^1 almeno.
Lo spazio delle funzioni ammissibili è

$$Y = \{y \in C^2([x_0, x_1]) : \big(x, y(x)\big) \in \Omega\ \forall x \in [x_0, x_1], y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1, y'(x_0) = p_0, y'(x_1) = p_1\}$$

(variazioni ammissibili $\in \{h \in C^2([x_0, x_1]) : h(x_0) = 0, h(x_1) = 0, h'(x_0) = 0, h'(x_1) = 0\}$)
La variazione prima del funzionale risulta essere

$$\delta\Phi(h) = \int\limits_{x_0}^{x_1} \Big[\frac{\partial F}{\partial y}\big(x, y(x), y'(x), y''(x)\big)h(x) + \frac{\partial F}{\partial y'}\big(x, y(x), y'(x), y''(x)\big)h'(x) + \frac{\partial F}{\partial y''}\big(x, y(x), y'(x), y''(x)\big)h''(x)\Big]\, dx$$

(è la parte lineare in h dell'espressione $\Phi(y + h) - \Phi(y)$).
Si tratta di un'espressione analoga a quella considerata nei casi precedenti, a parte l'ultimo termine. Integriamo per parti (due volte) l'ultimo termine (supponende

$F \in C^3, y \in C^4$):

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F}{\partial y''}\big(x, y(x), y'(x), y''(x)\big) h''(x)\, dx$$

$$= \left[\frac{\partial F}{\partial y''}\big(x, y(x), y'(x), y''(x)\big) h'(x)\right]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y''}\big(x, y(x), y'(x), y''(x)\big)\ h'(x)\, dx$$

$$= \left[\frac{\partial F}{\partial y''}\big(x, y(x), y'(x), y''(x)\big) h'(x)\right]_{x_0}^{x_1}$$

$$- \left[\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y''}\big(x, y(x), y'(x), y''(x)\big) h(x)\right]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial F}{\partial y''}\big(x, y(x), y'(x), y''(x)\big)\ h(x)\, dx$$

Date le condizioni ai limiti per h, si ha che tutti i termini valutati al bordo si annullano. Allora, ricordando i conti fatti nei casi precedenti per il termine intermedio, l'espressione della variazione prima del funzionale è

$$\delta\Phi(h) = \int_{x_0}^{x_1} [\tfrac{\partial F}{\partial y}\big(x, y(x), y'(x), y''(x)\big) - \tfrac{d}{dx}\tfrac{\partial F}{\partial y'}\big(x, y(x), y'(x), y''(x)\big) +$$

$$+ \tfrac{d^2}{dx^2}\tfrac{\partial F}{\partial y''}\big(x, y(x), y'(x), y''(x)\big)]\ h(x)\, dx$$

Il lemma fondamentale del calcolo delle variazioni, ci permette di concludere che, se $\delta\Phi(h) = 0$ per ogni h piccola variazione ammissibile, allora la funzione integranda si deve annullare.

In conclusione, si ottiene che la C.N. per l'esistenza di linee estremanti è

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial y}\big(x, y(x), y'(x), y''(x)\big) - \dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial F}{\partial y'}\big(x, y(x), y'(x), y''(x)\big) + \dfrac{d^2}{dx^2}\dfrac{\partial F}{\partial y''}\big(x, y(x), y'(x), y''(x)\big) = 0 \\ y(x_0) = y_0 \\ y(x_1) = y_1 \\ y'(x_0) = p_0 \\ y'(x_1) = p_1 \end{cases}$$

`Nota`: In generale, per un funzionale dipendente dalle derivate fino all'ordine n

$$\Phi(y) = \int_{x_0}^{x_1} F\big(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)\big)\, ds$$

le linee estremali sono soluzioni di

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial F}{\partial y''} + \cdots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} = 0$$

con le condizioni al bordo

$$\begin{aligned} y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = p_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = v_0 \\ y(x_1) = y_1,\ y'(x_1) = p_1, \dots, y^{(n-1)}(x_1) = v_1 \end{aligned}$$

• **Funzionali dipendenti da una coppia di funzioni $(\mathbf{y_1}, \mathbf{y_2})$**
Consideriamo il funzionale

$$\Phi(y_1, y_2) = \int_{x_0}^{x_1} F\Big(x, y_1(x), y_2(x), y_1'(x), y_2'(x)\Big)\, dx$$

con $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ($(x, y_1, y_2) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ con $x \in [x_0, x_1]$) di classe C^1 almeno..
Lo spazio delle funzioni ammissibili è

$$Y = \{y_1, y_2 \in C^1([x_0, x_1]) : y_1(x_0) = y_{1,0}, y_1(x_1) = y_{1,1}, y_2(x_0) = y_{2,0}, y_2(x_1) = y_{2,1}\,\}$$

(variazioni ammissibili:$\{h_1, h_2 \in C^1([x_0, x_1]) : h_1(x_0) = h_1(x_1) = 0, h_2(x_0) = h_2(x_1) = 0\}$)
La variazione prima del funzionale risulta essere

$$\delta\Phi(h_1, h_2) = \int_{x_0}^{x_1} [\frac{\partial F}{\partial y_1} h_1 + \frac{\partial F}{\partial y_2} h_2 + \frac{\partial F}{\partial y_1'} h_1' + \frac{\partial F}{\partial y_2'} h_2']\, dx$$

Integrando per parti e usando il lemma fondamentale del calcolo delle variazioni, troviamo che, se $y_1, y_2, F \in C^2$ la C.N. perché la coppia di linee (y_1, y_2) sia di minimo o di massimo relativo per il funzionale $\Phi(y_1, y_2)$ è data dal seguente sistema di Eulero

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial y_1}(x, y_1(x), y_2(x), y_1'(x), y_2'(x)) - \dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial F}{\partial y_1'}(x, y_1(x), y_2(x), y_1'(x), y_2'(x)) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y_2}(x, y_1(x), y_2(x), y_1'(x), y_2'(x)) - \dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial F}{\partial y_2'}(x, y_1(x), y_2(x), y_1'(x), y_2'(x)) = 0 \\ y_1(x_0) = y_{1,0} \\ y_1(x_1) = y_{1,1} \\ y_2(x_0) = y_{2,0} \\ y_2(x_1) = y_{2,1} \end{cases}$$

• **Funzionali di superficie**
Consideriamo il funzionale

$$\Phi(z) = \iint_D F\big(x, y, z(x, y), \tfrac{\partial z}{\partial x}(x, y), \tfrac{\partial z}{\partial y}(x, y)\big)\, dx\, dy$$

con $F = F(x, y, z, p, q) : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (cioè si richiede $(x, y, z) \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$ con $(x, y) \in D$, mentre non ci sono limitazioni per i valori delle derivate parziali) di classe C^1 almeno.

BORDO FISSO

Lo spazio delle funzioni ammissibili è

$$Z = \{z = z(x, y) \in C^1(D) : z|_{\partial D} = \zeta\,\}$$

dove $D \subset \mathbb{R}^2$ chiuso con frontiera regolare e ζ è una data funzione al bordo.
(variazioni ammissibili $\in \{h = h(x, y) \in C^1(D) : h|_{\partial D} = 0\}$)

La variazione prima del funzionale risulta essere

$$\delta\Phi(h) = \iint\limits_D [F_z\big(x,y,z(x,y),\tfrac{\partial z}{\partial x}(x,y),\tfrac{\partial z}{\partial y}(x,y)\big)h(x,y) + F_p\big(x,y,z(x,y),\tfrac{\partial z}{\partial x}(x,y),\tfrac{\partial z}{\partial y}(x,y)\big)\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)$$
$$+ F_q\big(x,y,z(x,y),\tfrac{\partial z}{\partial x}(x,y),\tfrac{\partial z}{\partial y}(x,y)\big)\frac{\partial h}{\partial y}(x,y)]\,dx\,dy$$

dove $F_z = \frac{\partial F}{\partial z}$, $F_p = \frac{\partial F}{\partial p} \equiv \frac{\partial F}{\partial z_x}$ e analogamente F_q è la derivata parziale di F rispetto al suo ultimo argomento.
Osserviamo che

$$\frac{\partial}{\partial x}(F_p h) + \frac{\partial}{\partial y}(F_q h) = F_p\frac{\partial h}{\partial x} + F_q\frac{\partial h}{\partial y} + \left[\frac{\partial F_p}{\partial x} + \frac{\partial F_q}{\partial y}\right]h$$

Usando la formula di Green (o il teorema della divergenza, come vedremo nella parte successiva), si ha

$$\begin{aligned}\iint\limits_D \left[F_p\frac{\partial h}{\partial x} + F_q\frac{\partial h}{\partial y}\right]dx\,dy &= \iint\limits_D \left[\frac{\partial}{\partial x}(F_p h) + \frac{\partial}{\partial y}(F_q h)\right]dxdy - \iint\limits_D \left[\frac{\partial F_p}{\partial x}h + \frac{\partial F_q}{\partial y}h\right]dx\,dy \\ &= \int\limits_{\partial D}[F_q h\,dx - F_p h\,dy] - \iint\limits_D \left[\frac{\partial F_p}{\partial x} + \frac{\partial F_q}{\partial y}\right]h\,dx\,dy\end{aligned}$$

Tenendo conto della condizione nulla al bordo per h, si ottiene che

$$\delta\Phi(h) = \iint\limits_D \left[F_z - \frac{\partial F_p}{\partial x} - \frac{\partial F_q}{\partial y}\right]h(x,y)\,dx\,dy \tag{10}$$

Allora la condizione $\delta\Phi(h) = 0$ per ogni variazione ammissibile h sufficientemente piccola conduce (ricordando il lemma fondamentale del calcolo delle variazioni) ad avere che la C.N. perché la superficie z sia di minimo o di massimo relativo per il funzionale $\Phi(z)$ è che

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial z} - \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial F}{\partial z_x} - \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial F}{\partial z_y} = 0 & \text{in } D \\ z|_{\partial D} = \zeta & \text{su } \partial D\end{cases}$$

<u>ESERCIZIO</u> Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ un dominio limitato e regolare. Si consideri il funzionale

$$\Phi(z) = \frac{1}{2}\tau\iint\limits_D |\nabla z(x,y)|^2\,dx\,dy - \iint\limits_D f(x,y)z(x,y)\,dx\,dy$$

dove τ è un parametro positivo.
Determinare le superficie estremali nella classe di funzioni ammissibili

$$Z = \{z = z(x,y) \in C^1(D) : z|_{\partial D} = \varphi\}.$$

[Si ottiene il problema di Dirichlet per l'equazione di Poisson; τ denota la tensione della membrana.]

BORDO LIBERO

Consideriamo ora il bordo libero di scorrere su una guida verticale; cerchiamo le condizioni al bordo da associare all'equazione di Eulero. Procedendo come nel caso precedente, ma usando il teorema della divergenza (se il bordo ∂D è regolare, D limitato regolare e tutte le funzioni da integrare sono continue), si ha:

$$\iint\limits_D \left[\frac{\partial}{\partial x}(F_p h) + \frac{\partial}{\partial y}(F_q h)\right] dxdy = \int\limits_{\partial D} [h\left(F_p\vec{i} + F_q\vec{j}\right) \circ \vec{N}]\, ds$$

dove $\vec{N}$ è il versore normale al bordo ∂D uscente.

La variazione prima risulta essere

$$\delta\Phi(h) = \iint\limits_D \left[F_z - \frac{\partial F_p}{\partial x} - \frac{\partial F_q}{\partial y}\right] h(x,y)\, dx\, dy + \int\limits_{\partial D} [h\left(F_p\vec{i} + F_q\vec{j}\right) \circ \vec{N}]\, ds \qquad (11)$$

Ragionando come nel caso di dominio spaziale unidimensionale, ne segue che deve valere l'equazione di Eulero e inoltre anche l'integrale al bordo si deve annullare per ogni h ammissibile piccola. Usando di nuovo il lemma fondamentale del calcolo delle variazioni per l'integrale di linea su ∂D, otteniamo che $\left(F_p\vec{i} + F_q\vec{j}\right) \circ \vec{N}$ si deve annullare al bordo; quindi il problema ai limiti da considerare è

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial z} - \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial F}{\partial z_x} - \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial F}{\partial z_y} = 0 & \text{in } D \\ \left(F_p\vec{i} + F_q\vec{j}\right) \circ \vec{N}|_{\partial D} = 0 & \text{su } \partial D \end{cases}$$

<u>ESERCIZIO</u> Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ un dominio limitato e regolare. Si consideri il funzionale

$$\Phi(z) = \frac{1}{2}\tau \iint\limits_D |\nabla z(x,y)|^2\, dx\ dy - \iint\limits_D f(x,y)z(x,y)\, dx\ dy - \int_{\partial D} \psi(x,y)z(x,y)\, ds$$

dove τ è un parametro positivo.

Determinare le superficie estremali nella classe di funzioni ammissibili

$$Z = \{z = z(x,y) \in C^1(D)\}.$$

[Si ottiene il problema di Neumann per l'equazione di Poisson; τ denota la tensione della membrana.]