Analisi Matematica — I Appello — Cognome: ______________________

31/1/2017 — Nome: ______________________

☐ In caso di esito sufficiente della prova scritta, chiedo di sostenere la prova orale facoltativa.

Per ognuna delle seguenti domande, verrà assegnato il punteggio indicato sulla destra in caso di risposta corretta, oppure 0 punti in caso di risposta sbagliata o non data. Si supera la prova scritta se il punteggio totale risulta ≥ 18 e se il punteggio della prima parte ≥ 12. Il tempo a disposizione è 2 ore e 30 minuti.

PRIMA PARTE

1. Sia $z = 1 + i$, e sia $C = \mathrm{Im}\left[\dfrac{z+4}{z+2} + \mathrm{Re}(z(z+1))\right]$.
Allora $5C =$ ___-1___ . — 2 pt.

2. Sia
$$l = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x + e^{-\frac{1}{2}x^2} - 1}{x^4}.$$
Allora $3\,l =$ ___$1/4$___ . — 2 pt.

3. Sia $f(x) = \arctan \dfrac{1}{x}$, e sia $t(x)$ la funzione che rappresenta la retta tangente al grafico di f nel punto $(1, f(1))$. Allora $2\dfrac{t(1-\frac{\pi}{2})}{\pi} =$ ___1___ . — 2 pt.

4. Sia dato l'integrale definito
$$I = \int_2^1 \left[\ln x^2 + \sin(\pi x)\right]\,dx.$$
Allora $I =$ ___$-4\ln 2 + 2 + 2/\pi$___ . — 2 pt.

5. Sia $f(x) = x + \dfrac{\sin(\pi x)}{\pi} + e^{-3x}$, e sia $g(y)$ la funzione inversa.
Allora $12\,g'(1) =$ ___-12___ . — 2 pt.

6. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = \dfrac{2y}{x} + x^2 \\ y(1) = 3\,. \end{cases}$$
Si determini $y(2) =$ ___16___ — 2 pt.

7. Sia $f(x,y) = x^2 + x^8 + (x-y)^2 + 2$, $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Sia m il **valore** minimo assoluto assunto dalla funzione f in $\mathbb{R}^2$. Allora $m =$ ___2___ . — 2 pt.

8. Sia $z = g(x,y)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, l'equazione del piano tangente alla superficie S di equazione cartesiana $z = \arctan(xy) + xy$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, nel punto $(x_o, y_o, z_o) = (1,\,1,\,z(1,1))$ di S.
Allora $g(1-\frac{\pi}{6}, 2) =$ ___$5/2$___ — 2 pt.

9. Sia $D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1 \right\}$. Allora $\displaystyle\int_D xy\,dxdy =$ ___π___ — 2 pt.

10. Sia Σ la superficie regolare di equazioni parametriche $\mathbf{r}(u,v) = (u\cos v, u\sin v, u^2)$, con $(u,v) \in E$, dove $E = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le v \le 2\pi,\ 0 \le u \le 1\}$.
Allora l'area della superficie $a(\Sigma) =$ $\pi/6[\sqrt{125} - 1]$

2 pt.

SECONDA PARTE

11. Sia $f(x) = \dfrac{x\cos x}{x^2+1}$, definita $\forall x \in \mathbb{R}$. Quali delle seguenti proprietà ha f in tutto il suo dominio? A) continua, B) derivabile, C) sup. limitata, D) inf. limitata, E) monotona, F) periodica, G) pari, H) dispari. La risposta è: **A B C D H**

3 pt.

12. Enunciare il teorema di Rolle per una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.
Soluzione: ...

3 pt.

13. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ un parametro. L'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ è convergente per:

4 pt.

(a) $\alpha > 1$
(b) nessun $\alpha \in \mathbb{R}$
(c) $\alpha > 1/2$
(d) solo per $\alpha < -2$
(e) tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$
(✔) $\alpha \le 0$

14. Si consideri la funzione

4 pt.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5}{2(x^2+y^2)^2} & (x,y) \ne (0,0), \\ 0 \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Dire quale delle seguenti risposte è corretta

1. f è differenziabile in $(0,0)$;
2. f è continua ma non differenziabile in $(0,0)$;
3. f è continua in $(0,0)$ e $\nabla f(0,0) = (0,0)$;
4. f è continua in $(0,0)$, ma non esiste alcuna derivata direzionale in $(0,0)$.

2