Analisi Matematica | IV Appello | Cognome: ____________
28/9/2018 | | Nome: ____________

☐ In caso di esito sufficiente della prova scritta, chiedo di sostenere la prova orale facoltativa.

Per ognuna delle seguenti domande, verrà assegnato il punteggio indicato sulla destra in caso di risposta corretta, oppure 0 punti in caso di risposta sbagliata o non data. Si supera la prova scritta se il punteggio totale risulta ≥ 18 e se il punteggio della prima parte ≥ 12. Il tempo a disposizione è 3 ore.

PRIMA PARTE

1. Siano z_k, $k = 0, 1, 2, 3$ le radici complesse dell'equazione: $(z+i)^4 = (\sqrt{3}+i)^3$. Allora, per $k = 0, 1, 2, 3$, si ha $|z_k + i|^4 =$ ___8___ . **2 pt.**

2. Sia
$$I = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{3^{1/x} + x^2 + 2^{-x}}{\log^{12}(x) + 4 + x} + \frac{e^x x^4}{x^8 3^x} \right).$$
Allora $I =$ ___$+\infty$___ . **2 pt.**

3. Sia $f(x) = e^{5x} + x^5$ e sia g la funzione inversa di f. Allora $g'(1) =$ ___1/5___ . **2 pt.**

4. Sia dato l'integrale definito
$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \left(3 + \arctan(x^3) + (6x^3+1)\cos(x) + \cos^2(4x)\right) dx.$$
Allora $I =$ ___7π___ . **2 pt.**

5. Sia
$$f(x) = 4 - \sqrt{16 - x^2}$$
e sia x_m il punto di minimo assoluto di f. Allora $f''(x_m) =$ ___1/4___ . **2 pt.**

6. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy
$$\begin{cases} y'' + 6y' + 9y = 9x + 15 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0\ . \end{cases}$$
Si determini il valore di $e^{-5} y(-\frac{5}{3}) =$ ___$-17/3 \ - \ 2/3\, e^5$___ . **2 pt.**

7. Si consideri $f(x,y) = (x^2-1)(y^2-1)$, $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Dette (x_o, y_o) le coordinate dell'unico punto di estremo relativo libero, risulta $x_o + y_o =$ ___0___ . **2 pt.**

8. Sia $z = g(x,y)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, l'equazione del piano tangente alla superficie S di equazione cartesiana $z = \dfrac{x\ +\ y}{\cos x\ +\ \cos y}$, $(x,y) \in \{\cos x\ +\ \cos y \neq 0\}$, nel punto $(x_o, y_o, z_o) = (0,\ \frac{\pi}{2},\ z(0, \frac{\pi}{2}))$ di S. Allora $g(-\frac{\pi^2}{4}, \pi) =$ ___π___ . **2 pt.**

9. Si consideri nel piano xy il dominio $K = \{0 \leq \rho \leq \theta,\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\}$. Calcolare l'area di K con un integrale doppio, utilizzando le coordinate polari. $a(K) =$ ___$\pi^3/384$___ . **2 pt.**

10. Si consideri la curva regolare Γ di equazioni parametriche

2 pt.

$$\begin{cases} x = t\cos(2t), \\ y = t\sin(2t), \\ z = \sqrt{3}t \end{cases}$$

$t \in [0,1]$. Allora l'integrale curvilineo $\int_\Gamma \frac{z}{\sqrt{3}}\, d\sigma_1$ risulta $\underline{\quad 2/3(2\sqrt{2}-1) \quad}$

SECONDA PARTE

11. Sia $f(x) = xe^{-x^2}$, $x \geq 0$. Quali delle seguenti proprietà ha f? A) continua, B) derivabile, C) sup. limitata, D) inf. limitata, E) monotona, F) ha massimo assoluto in $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, G) ha minimo assoluto in 2, H) ha minimo assoluto in $x = 0$ La risposta è: **ABCDFH**

3 pt.

12. Enunciare il teorema del confronto (o dei carabinieri) per successioni.

3 pt.

Soluzione:

13. Dato il parametro reale α e l'integrale improprio $I = \int_5^{+\infty} \frac{x}{x^\alpha \sqrt{x-5}} \mathrm{d}x$, stabilire quale (una sola) delle seguenti risposte è corretta:

4 pt.

(a) Per ogni α l'integrale diverge a $+\infty$

(b) Per ogni α l'integrale diverge a $-\infty$

(✔) L'integrale converge solo per $\alpha > 3/2$

(d) L'integrale converge solo per $\alpha < 3/2$

(e) L'integrale converge solo per $\alpha > 1$

14. Dato il parametro $\alpha > 0$, determinare per quali valori di α converge la serie numerica

4 pt.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \sin\left(\frac{3}{2+\sqrt{n}}\right).$$

(a) La serie converge per ogni $\alpha > 0$

(b) La serie non converge mai

(✔) La serie converge solo per $\alpha > 1/2$

(d) La serie converge solo per $0 < \alpha < 1/2$

(e) La serie converge solo per $\alpha > 1$