Analisi Matematica
27/2/2018

II Appello

Cognome: ____________________
Nome: ____________________

☐ In caso di esito sufficiente della prova scritta, chiedo di sostenere la prova orale facoltativa.

Per ognuna delle seguenti domande, verrà assegnato il punteggio indicato sulla destra in caso di risposta corretta, oppure 0 punti in caso di risposta sbagliata o non data. Si supera la prova scritta se il punteggio totale risulta ≥ 18 e se il punteggio della prima parte ≥ 12. Il tempo a disposizione è 3 ore.

PRIMA PARTE

1. Dato $z = 3 + 2i$, sia $C = \operatorname{Im}\left[\dfrac{z+3}{z+5} + 2\operatorname{Re} z\right]$.
Allora $C =$ 1/17 . **2 pt.**

2. Sia
$$l = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\cos x}{\cos\left(\frac{2}{x}\right) + x^3 \sin\left(\frac{1}{x^4}\right) + x}.$$
Allora $l =$ 0 . **2 pt.**

3. Sia $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+5}{4x^5+1}\right)$, e sia $t(x)$ la funzione che rappresenta la retta tangente al grafico di f nel punto $(0, f(0))$. Allora $t(1) =$ $\ln 5 + 1/5$. **2 pt.**

4. Sia dato l'integrale
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\, dx.$$
Allora $I =$ $\pi/4$. **2 pt.**

5. Sia
$$f(x) = \frac{3\cos(\pi x) - e^{x-1}}{x^3} + \ln(2x-1),$$
definita in un intorno di $x = 1$ e sia $g(y)$ la funzione inversa.
Allora $g'(-4) =$ 1/13 . **2 pt.**

6. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = 3x^2 y + 2e^{x^3} \\ y(0) = 1 . \end{cases}$$
Si determini $y(1) =$ $3e$. **2 pt.**

7. Si consideri $f(x,y) = x^5 - 5x - (y+2)^2$, $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Dette (x_o, y_o) le coordinate dell'unico punto di estremo relativo libero, risulta $x_o + y_o =$ -3 . **2 pt.**

8. Sia $z = g(x,y)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, l'equazione del piano tangente alla superficie S di equazione cartesiana $z = y^3 - 2y^2 + 2xy - x^2 y$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, nel punto $(x_o, y_o, z_o) = (2,\, 1,\, z(2,1))$ di S.
Allora $g(0,0) =$ 4 . **2 pt.**

9. Si consideri nel piano xy il triangolo T di vertici $(0,0)$, $(1,-1)$, $(-1,-1)$. Calcolare il valore dell'integrale $I = \displaystyle\int_T 5y\, dxdy =$ $-10/3$. **2 pt.**

10. Si consideri la curva regolare Γ di equazioni parametriche,

$$\begin{cases} x = t, \\ y = \sqrt{2}e^t, \\ z = \dfrac{e^{2t}}{2}, \end{cases}$$

$t \in [0,1]$. Allora la lunghezza della curva risulta $(e^2+1)/2$

2 pt.

SECONDA PARTE

11. Sia $f(x) = -\ln(1+x^2) + e^{\cos x}$, definita $\forall x \in \mathbb{R}$. Quali delle seguenti proprietà ha f in tutto il suo dominio? A) continua, B) derivabile, C) sup. limitata, D) inf. limitata, E) monotona, F) periodica, G) pari, H) dispari. La risposta è: **ABCG**

3 pt.

12. Enunciare il teorema di Rolle.

Soluzione:

3 pt.

13. Sia $\alpha > 0$ un parametro. L'integrale improprio $\displaystyle\int_0^3 \frac{(\ln x)(\sin x^\alpha)}{x^2} dx$ è convergente:

4 pt.

(a) per $\alpha \geq 1$

(b) ✔ per $\alpha > 1$

(c) solo per $0 < \alpha < 1/2$

(d) solo per $\alpha \in \mathbb{Q}_+$

(e) per tutti gli $\alpha > 0$

(f) per $\alpha < 3$

14. Dire quali delle seguenti serie numeriche sono convergenti:

4 pt.

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{48n+1}$;
2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2+\sin n}{\sqrt[5]{n+1}}$;
3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2\ln(n+3)+7^{n+6}}$;
4. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln(6+n)}{n^8+5}$.

1, 3, 4