□ In caso di esito sufficiente della prova scritta, chiedo di sostenere la prova orale facoltativa.

Per ognuna delle seguenti domande, verrà assegnato il punteggio indicato sulla destra in caso di risposta corretta, oppure 0 punti in caso di risposta sbagliata o non data. Si supera la prova scritta se il punteggio totale risulta ≥ 18 e se il punteggio della prima parte ≥ 12 . Il tempo a disposizione è 3 ore.

PRIMA PARTE

1. Sia $z = 2 + i$, e sia $C = \frac{z - 2}{z + 4}$.
Allora $37(\operatorname{Im} C) = \underline{\quad 6 \quad}$. 2 pt.

2. Sia
$$l = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sinh x}{x \cosh x - x}$$

Allora $3l = \underline{\quad -4 \quad}$. 2 pt.

3. Sia $f(x) = \ln(1 + \sin(\frac{\pi}{3}x))$, e sia $t(x)$ la funzione che rappresenta la retta tangente al grafico di f nel punto $(3, f(3))$. Allora $\frac{t(9/2)}{\pi} = \underline{\quad -1/2 \quad}$. 2 pt.

4. Sia dato l'integrale definito
$$I = \int_0^1 \frac{x + 1}{(x - 2)(x + 4)} dx$$

Allora $e^I = \underline{\quad \sqrt{5/8} \quad}$. 2 pt.

5. Sia $f(x) = e^{\sin(\pi x)} + \ln x$, definita in un intorno di $x = 1$, e sia $g(y)$ la funzione inversa.
Allora $(\pi - 1)g'(1) = \underline{\quad -1 \quad}$. 2 pt.

6. Sia $y(x)$ la soluzione del problema ai limiti completo
$$\begin{cases} y'' + 6y' + 18y = 18x + 6 \\ y(0) = 0, y(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Si determini $y(\frac{1}{2}) = \underline{\quad 1/2 \quad}$. 2 pt.

7. Si consideri $f(x, y) = x^6 + y^6 - 6xy$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Siano q_1 e q_2 i valori della f nei due punti di minimo relativo libero.
Allora $q_1 + q_2 = \underline{\quad -8 \quad}$. 2 pt.

8. Sia $z = g(x, y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, l'equazione del piano tangente alla superficie S di equazione cartesiana $z = x + y + \arctan(xy)$, $(x, y) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$, nel punto $(x_o, y_o, z_o) = (1, 1, z(1, 1))$ di S .
Allora $g(3, -\frac{7}{3}) = \underline{\quad \pi/4 \quad}$. 2 pt.

9. Sia $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 4\}$. Allora $\int_E (2xy - 1) dx dy = \underline{\quad -32/3 \quad}$. 2 pt.

10. Si consideri la curva regolare Γ di equazione parametrica

2 pt.

$$\begin{cases} x = t \cos t, \\ y = t \sin t, \\ z = \frac{2\sqrt{2}}{3}t^{3/2}, \end{cases} \quad t \in [0, 1].$$

Allora la lunghezza della curva risulta _____ $3/2$ _____

SECONDA PARTE

11. Sia $f(x) = \sin^2 x + e^{\cos x}$, definita $\forall x \in \mathbb{R}$. Quali delle seguenti proprietà ha f in tutto il suo dominio? A) continua, B) derivabile, C) sup. limitata, D) inf. limitata, E) monotona, F) periodica, G) pari, H) dispari. La risposta è: ABCDFG

3 pt.

12. Enunciare il teorema di Rolle.

Soluzione:

3 pt.

13. Sia $\alpha > 0$ un parametro. L'integrale improprio $\int_5^{+\infty} \frac{x^2 + |\sin x|^\alpha}{x^4 + (\ln x)^\alpha} dx$ è convergente:

4 pt.

- (a) solo per $\alpha > 1$
- (b) per nessun $\alpha > 0$
- (c) solo per $0 < \alpha < 1/2$
- (d) solo per $\alpha \in \mathbb{Q}_+$
- (e) per tutti gli $\alpha > 0$
- (f) solo per $0 < \alpha < 2$

14. Dire quali delle seguenti serie numeriche sono convergenti:

4 pt.

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-27)^n}{27n + 1}$;
2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 + |\sin n|}{\sqrt[3]{n + 1}}$;
3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n^6 + 6^{n+6}}$;
4. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln(1 + n^2)}{n^6 + 1}$.

3, 4