Ingegneria Civile-Ambientale
22/1/2019

Analisi Matematica

Cognome: ______________________
Nome: ______________________

☐ In caso di esito sufficiente della prova scritta, chiedo di sostenere la prova orale facoltativa.

Per ognuna delle seguenti domande, verrà assegnato il punteggio indicato sulla destra in caso di risposta corretta, oppure 0 punti in caso di risposta sbagliata o non data. Si supera la prova scritta se il punteggio totale risulta ≥ 18 e se il punteggio della prima parte ≥ 12. Il tempo a disposizione è 3 ore.

PRIMA PARTE

1. Sia $z = 4 + 2i$ e $C = \mathrm{Im}\left(\dfrac{2z}{z-2} + \mathrm{Re}(z) + z\bar{z} + z - \bar{z}\right)$. Allora $C =$ ____3____ . **2 pt.**

2. Sia

$$I = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x^2)}{x^2+1} + \frac{1-\cos x - \mathrm{e}^x + 1 + x}{x\sin(x^2)}\right).$$

Allora $6I =$ ____-1____ . **2 pt.**

3. Sia $f(x) = \dfrac{\sin x + 2}{x^2+1} + 2x + 2$ e sia t la retta tangente ad f in $(0, f(0))$.
Allora $t(1) =$ ____7____ . **2 pt.**

4. Sia dato l'integrale definito

$$I = \int_0^1 \left(-6x^2\mathrm{e}^{-x^3} + x\mathrm{e}^{-x}\right)\, dx.$$

Allora $I =$ ____-1____ . **2 pt.**

5. Sia

$$f(x) = \frac{3\pi}{x^2+4} - \arctan(\mathrm{e}^x)$$

e sia g la funzione inversa di f. Allora $g'(\pi/2) =$ ____-2____ . **2 pt.**

6. Sia $z = g(x,y)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, l'equazione del piano tangente alla superficie S di equazione cartesiana $z = e^{1+\sin x + \cos y}$, nel punto $(x_o, y_o, z_o) = (0,\ \frac{\pi}{2},\ z(0, \frac{\pi}{2}))$ di S.
Allora $g(-1, \pi) =$ ____$-\pi e/2$____ . **2 pt.**

7. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{4-y^2}{1+x^2} \\ y(0) = 3\,. \end{cases}$$

Si determini il valore di $\lim_{x\to+\infty} y(x) =$ ____$2(5\mathrm{e}^{2\pi}+1)/(5\mathrm{e}^{2\pi}-1)$____ . **2 pt.**

8. Si consideri $f(x,y) = 1 + 4x^2 + 9y^2$ in $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y \leq 2,\ 0 \leq x \leq 2\}$. Detti m e M rispettivamente il minimo ed il massimo assoluti di f in K, risulta $m + M =$ ____54____ . **2 pt.**

9. Si consideri nel piano xy il dominio $E = \{0 \le y \le 1, e^y \le x \le 2e - e^y\}$. Allora $\int_E 2xy\,dxdy =$ $\underline{\quad 2e^2 - 4e \quad}$.

2 pt.

10. Si consideri la curva regolare Γ di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \\ z = t^2 \end{cases}$$

$t \in [1, 2]$. Allora l'integrale curvilineo $\int_\Gamma \sqrt{z}\,d\sigma_1$ risulta $\underline{\quad 1/12[(17)^{3/2} - 5^{3/2}] \quad}$

2 pt.

SECONDA PARTE

11. Sia $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2+4x}$, $x \in R$. Quali delle seguenti proprietà ha f? A) continua, B) derivabile, C) sup. limitata, D) inf. limitata, E) monotona, F) convessa, G) concava, H) pari, I) assume massimo assoluto in $x = 2$.
La risposta è: **ABCDI**

3 pt.

12. Enunciare il teorema di Fermat.
Soluzione:

3 pt.

13. Dato il parametro reale α e l'integrale improprio $I = \int_2^{+\infty} \frac{x^\alpha + 2}{\sqrt{x-2}(x+1)x^{1/2}}\mathrm{d}x$, stabilire quale (una sola) delle seguenti risposte è corretta:

4 pt.

(a) Per ogni α l'integrale diverge a $+\infty$
(b) Per ogni α l'integrale diverge a $-\infty$
(c) L'integrale converge solo per $\alpha > 2$
(d) L'integrale converge solo per $\alpha > 1$
(✔) L'integrale converge solo per $\alpha < 1$

14. Dato il parametro $\alpha > 0$, determinare per quali valori di α converge la serie numerica

4 pt.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \ln\left(1 + \frac{3}{\sqrt{n}}\right).$$

(a) La serie converge per ogni $\alpha > 0$
(b) La serie non converge mai
(✔) La serie converge solo per $\alpha > 1/2$
(d) La serie converge solo per $0 < \alpha < 1/2$
(e) La serie converge solo per $\alpha > 1$