Analisi Matematica | II Appello | Cognome: ____________
18/7/2018 | | Nome: ____________

☐ In caso di esito sufficiente della prova scritta, chiedo di sostenere la prova orale facoltativa.

Per ognuna delle seguenti domande, verrà assegnato il punteggio indicato sulla destra in caso di risposta corretta, oppure 0 punti in caso di risposta sbagliata o non data. Si supera la prova scritta se il punteggio totale risulta ≥ 18 e se il punteggio della prima parte ≥ 12. Il tempo a disposizione è 3 ore.

PRIMA PARTE

1. Siano z_1 e z_2 le due radici puramente immaginarie dell'equazione $(z^4 + 2z^2 - 3)^2 = 0$. Allora il quadrato del loro modulo vale $|z_1|^2 = |z_2|^2 =$ ___3___ . [2 pt.]

2. Sia

$$l = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{3+n}\right)^{2n}.$$

Allora $\log_e(l) =$ ___-6___ . [2 pt.]

3. Sia $f(x) = \log_e(2x+3)$. Allora la retta r tangente a f nel punto $x = 0$ è tale che $r(3) =$ ___$2 + \log_e(3)$___ . [2 pt.]

4. Sia dato l'integrale definito

$$I = \int_0^2 \frac{8}{x^2+4} + \sin(\pi x)\, dx.$$

Allora $I =$ ___π___ . [2 pt.]

5. Sia

$$l = \lim_{x\to 0} \left(\frac{e^{x^2} + 2\cos(x) - 3}{\sin(x^4)}\right).$$

Allora $12\, l =$ ___7___ . [2 pt.]

6. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{(y+1)(y+2)}{x+1} \\ y(0) = 0\,. \end{cases}$$

Si determini $y(\frac{1}{2}) =$ ___2___ . [2 pt.]

7. Si consideri $f(x,y) = (y^2 - 4)\cosh x,\ \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Dette (x_o, y_o) le coordinate dell'unico punto di estremo relativo libero, risulta $x_o + y_o =$ ___0___ . [2 pt.]

8. Sia $z = g(x,y)\,,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$, l'equazione del piano tangente alla superficie S di equazione cartesiana $z = 3x^2 + 2y + \log_e(1+xy)\,,\ (x,y) \in \{1 + xy > 0\}$, nel punto $(x_o, y_o, z_o) = (1,\, 0,\, z(1,0))$ di S. Allora $g(2,1) =$ ___12___ . [2 pt.]

9. Si consideri nel piano xy il dominio $K = \{0 \leq x \leq 1,\ x^3 \leq y \leq x\}$. Calcolare il valore dell'integrale $I = \int_K x^2 e^y\, dxdy =$ ___$(2e-5)/3$___ . [2 pt.]

10. Si consideri la curva regolare Γ di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = t^2 \cos t, \\ y = t^2 \sin t, \\ z = \frac{4}{5} t^{5/2}, \end{cases}$$

$t \in [1,2]$. Allora la lunghezza $\sigma_1(\Gamma)$ risulta ______16/3______

2 pt.

SECONDA PARTE

11. Sia $f(x) = e^{-x^2}$. Quali delle seguenti proprietà ha f? A) è definita su tutto R, B) derivabile, C) sup. limitata, D) inf. limitata, E) monotona, F) convessa, G) pari, H) dispari. La risposta è: **ABCDG**

3 pt.

12. Enunciare il teorema fondamentale del calcolo integrale.

Soluzione:

3 pt.

13. Dato l'integrale improprio $I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)}\, dx$, stabilire quale (una sola) delle seguenti risposte è corretta:

4 pt.

(a) L'integrale diverge a $+\infty$

(b) L'integrale diverge a $-\infty$

(c) L'integrale converge e vale $I = 1$

(d) L'integrale converge e vale $l = -\log_e(2)$

(e) ✔ L'integrale converge e vale $I = \log_e(2)$

14. Dire quali delle seguenti serie numeriche sono convergenti:

4 pt.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{7n^2}$;
2. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n + \ln(n+1) + \sin^2 n}$;
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+4}\right)^{n^2}$;
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2}$.

3, 4