Autorizzo la pubblicazione dell'esito dello scritto on-line

Firma: _____

In caso di esito sufficiente della prova scritta, chiedo di sostenere la prova orale facoltativa.

Per ognuna delle seguenti domande, verrà assegnato il punteggio indicato sulla destra in caso di risposta corretta, oppure 0 punti in caso di risposta sbagliata o non data. Si supera la prova scritta se il punteggio totale risulta ≥ 18 e se il punteggio della prima parte ≥ 12 . Il tempo a disposizione è 2 ore e 30 minuti.

PRIMA PARTE

1. Sia $z = 3 + i$, e sia $C = \operatorname{Re} \left[\frac{(z + i)}{z^2 + 1} + \frac{\bar{z}}{z} \right]$.

Allora $C = \underline{17/15}$.

2 pt.

2. Sia

$$l = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin x}{\sqrt{x+1} - 1} + \frac{4 + x^2}{x^2 + 2} - \frac{e^x - 1}{\ln(x+1)} \right].$$

Allora $l = \underline{3}$.

2 pt.

3. Sia $f(x) = \frac{\arctg(x^2) + 3}{x^5 + 1} + 2x + 1$, e sia $t(x)$ la funzione che rappresenta la retta tangente al grafico di f nel punto $(0, f(0))$.

Allora $t(-2) = \underline{0}$.

2 pt.

4. Sia dato l'integrale improprio

$$I = \int_0^{+\infty} \left[x^3 e^{-2x^4} + \frac{2}{1 + (\pi x)^2} \right] dx.$$

Allora $I = \underline{9/8}$.

2 pt.

5. Per $x > -1$, sia $f(x) = \frac{2}{x^3 + 1} - \frac{4}{\pi} \arctg(x+1) + 2e^{-x^3} - 5$, e sia $g(y)$ la funzione inversa.

Allora $g'(-2) = \underline{-\pi/2}$.

2 pt.

6. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 5y' + 6y = 6x + 1 \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$$

Si determini $y(1) = \underline{e^3 - 2e^2 + 2}$.

2 pt.

7. Sia $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq y \leq 2, -1 \leq x \leq 1\}$ e $f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - y^2, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Siano: M il **valore** massimo assoluto assunto dalla restrizione della funzione f a Q ; m il **valore** minimo assoluto assunto dalla restrizione della funzione f a Q . Allora $M + m = \underline{47/4}$.

2 pt.

8. Sia $z = g(x, y), (x, y) \in \mathbb{R}^2$, l'equazione del piano tangente alla superficie S di equazione cartesiana $z = x^2 + y^3 + \cos \pi(x + y), (x, y) \in \mathbb{R}^2$, nel punto $(x_o, y_o, z_o) = (1, 1, z(1, 1))$ di S .

Allora $g(3, 4) = \underline{16}$.

2 pt.

9. Sia γ l'arco di curva regolare di equazione in forma polare $\rho(\theta) = e^\theta$ con $\theta \in [0, \pi]$. Allora la lunghezza dell'arco γ è $\sqrt{2}(e^\pi - 1)$

2 pt.

10. Sia Σ la superficie regolare di equazioni parametriche $\mathbf{r}(u, v) = (3 \cos u \sin v, 3 \sin u \sin v, 3 \cos v)$, con $(u, v) \in E$, dove $E = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\pi}{4} \leq v \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}\}$. Allora l'area della superficie $a(\Sigma) = \underline{\hspace{2cm} 9\pi\sqrt{2}/4 \hspace{2cm}}$

2 pt.

SECONDA PARTE

11. Sia $f(x) = \frac{|x|^2 + \sin x}{3 + \ln(1 + x^2)}$, definita $\forall x \in \mathbb{R}$. Quali delle seguenti proprietà ha f in tutto il suo dominio? A) continua, B) derivabile, C) sup. limitata, D) inf. limitata, E) monotona, F) periodica, G) pari, H) dispari. La risposta è: **A B D**

3 pt.

12. Enunciare il teorema di Fermat per una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.
Soluzione: ...

3 pt.

13. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ un parametro. L'integrale improprio $\int_0^{+\infty} \frac{e^{(\alpha+1)x}}{x} dx$ è convergente per:

4 pt.

- (a) $\alpha > -1$
- (b) nessun $\alpha \in \mathbb{R}$
- (c) $\alpha > 1/2$
- (d) $\alpha < 0$
- (e) tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$
- (f) $\alpha \leq -1$

14. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = \sin \sqrt[5]{x^2 y^3}$. Date le seguenti affermazioni

4 pt.

1. f è continua in $(0, 0)$,
2. le derivate parziali f_x e f_y esistono in $(0, 0)$,
3. f è derivabile lungo qualunque direzione in $(0, 0)$,
4. f è differenziabile in $(0, 0)$,

sono vere : **1, 2, 3**