

□ In caso di esito sufficiente della prova scritta, chiedo di sostenere la prova orale facoltativa.

Per ognuna delle seguenti domande, verrà assegnato il punteggio indicato sulla destra in caso di risposta corretta, oppure 0 punti in caso di risposta sbagliata o non data. Si supera la prova scritta se il punteggio totale risulta ≥ 18 e se il punteggio della prima parte ≥ 12 . Il tempo a disposizione è 3 ore.

PRIMA PARTE

1. Sia $z = 3 + i$, $u = -1 + 2i$, $w = 1 + i$ e sia $C = \frac{z + u}{w}$.

Allora $\text{Im } C = \underline{\quad 1/2 \quad}$.

2 pt.

2. Sia

$$l = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{8 \arctan(8x)}{6x} - 8^{-6x} \right).$$

Allora $3l = \underline{\quad 29 \quad}$.

2 pt.

3. Sia $f(x) = (x^2 + e^3)^{3x}$, e sia $t(x)$ la funzione che rappresenta la retta tangente al grafico di f nel punto $(0, f(0))$. Allora $t(1) = \underline{\quad 10 \quad}$.

2 pt.

4. Sia dato l'integrale improprio

$$I = \int_0^{+\infty} \left(\frac{2}{1+x^2} + 6xe^{-9x^2} \right) dx.$$

Allora $I = \underline{\quad \pi + 1/3 \quad}$.

2 pt.

5. Sia $f(x) = e^{2x} + 2x + 1$, definita in un intorno di $x = 0$ e sia $g(y)$ la funzione inversa.

Allora $\frac{3}{g'(2)} = \underline{\quad 12 \quad}$.

2 pt.

6. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = x - \frac{1}{2} \\ y(0) = 1, y'(0) = 1. \end{cases}$$

Si determini $y(1) = \underline{\quad e/2 + 1 \quad}$.

2 pt.

7. Si consideri $f(x, y) = 2x^3 + y^3 - 12y + 3x^2$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Siano q_1 e q_2 i valori della f nei due punti di estremo relativo libero.

Allora $q_1 + q_2 = \underline{\quad 1 \quad}$.

2 pt.

8. Sia $z = g(x, y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, l'equazione del piano tangente alla superficie S di equazione cartesiana $z = x^2 + 2y^2 - 8x$, $(x, y) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$, nel punto $(x_o, y_o, z_o) = (1, 1, z(1, 1))$ di S .

Allora $g(0, 0) = \underline{\quad -3 \quad}$.

2 pt.

9. Sia $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4 \leq x^2 + y^2 \leq 6, y \leq 0\}$. Allora $\int_E x^2 y \, dx dy = \underline{\quad -2/15(6^{5/2} - 32) \quad}$.

2 pt.

10. Si consideri la curva regolare Γ grafico della funzione $y = \ln(\cos x)$, $x \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$. Allora la lunghezza

della curva risulta $\left[\ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| \right]_{\tan(\pi/12)}^{\sqrt{3}/3}$

2 pt.

SECONDA PARTE

11. Sia $f(x) = x^2 + e^{\cos x}$, definita $\forall x \in \mathbb{R}$. Quali delle seguenti proprietà ha f in tutto il suo dominio?

A) continua, B) derivabile, C) sup. limitata, D) inf. limitata, E) monotona, F) periodica, G) pari, H) dispari. La risposta è: ABDG

3 pt.

12. Enunciare il teorema di Lagrange.

Soluzione:

3 pt.

13. Sia $\alpha > 0$ un parametro. L'integrale improprio $\int_9^{+\infty} \frac{\ln(x^4 + 1) + 3x^\alpha + 1}{x^4 \arctan(x^2) + 3 \sin x} dx$ è convergente:

(a) per $\alpha > 17$

(b) per nessun $\alpha > 0$

(c) solo per $0 < \alpha < 1/2$

(d) solo per $\alpha \in \mathbb{Q}_+$

(e) per tutti gli $\alpha > 0$

☒ (f) per $\alpha < 3$

4 pt.

14. Dire quali delle seguenti serie numeriche sono convergenti:

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-48)^n}{48n+1}$;

2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 + |\cos n|}{\sqrt[5]{n+1}}$;

3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n^6 + 7^{n+6}}$;

4. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln(1+n^6)}{n^8+1}$.

3, 4

4 pt.