

☐ Autorizzo la pubblicazione dell'esito dello scritto on-line

Firma: _____

☐ In caso di esito sufficiente della prova scritta, chiedo di sostenere la prova orale facoltativa.

Per ognuna delle seguenti domande, verrà assegnato il punteggio indicato sulla destra in caso di risposta corretta, oppure 0 punti in caso di risposta sbagliata o non data. Si supera la prova scritta se il punteggio totale risulta ≥ 18 e se il punteggio della prima parte ≥ 12 . Il tempo a disposizione è 2 ore e 30 minuti.

PRIMA PARTE

1. Sia $z = 3 + 2i$, e sia $C = \operatorname{Re} \left[\frac{(z + 4)}{z + 1} + \operatorname{Im}(z \bar{z}) \right]$.

Allora $C = \underline{\quad 8/5 \quad}$.

2 pt.

2. Sia

$$l = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{4 \cos x}{x^2} + \frac{3 - x^2 + \ln x^4}{x^2 + x + \sin x} - 4e^{-2x} [1 - \cos(e^x)] \right].$$

Allora $l = \underline{\quad -3 \quad}$.

2 pt.

3. Sia $f(x) = \pi \frac{\sin(2x^2)}{x^3 + 1} + 2 \cos(3\pi x)$, e sia $t(x)$ la funzione che rappresenta la retta tangente al grafico di f nel punto $(0, f(0))$. Allora $t(1) = \underline{\quad 2 \quad}$.

2 pt.

4. Sia dato l'integrale definito

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} [3 \cos(x^4) \operatorname{arctg}(x^5) + 3(x + 1) \cos^2 x + 2] dx.$$

Allora $I = \underline{\quad 7\pi \quad}$.

2 pt.

5. Sia $f(x) = \frac{1}{x+1} - 2 \sin x + 3e^{-x} + 2$, e sia $g(y)$ la funzione inversa.

Allora $g'(6) = \underline{\quad -1/6 \quad}$.

2 pt.

6. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{xe^{-y^2}}{y} \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

2 pt.

Si determini $y(\sqrt{e^2 - e}) = \underline{\quad \sqrt{2} \quad}$.

7. Sia $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$ e $f(x, y) = e^{4x^2 + 9y^2}$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Siano: M il **valore** massimo assoluto assunto dalla restrizione della funzione f a Q ; m il **valore** minimo assoluto assunto dalla restrizione della funzione f a Q . Allora $m + \ln M = \underline{\quad 37 \quad}$.

2 pt.

8. Si considerino la funzione $f(x, y) = \sin(x - y) + e^{x+y}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, il versore $\mathbf{v} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ e il punto $(x_o, y_o) = (1, 1)$. Allora $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x_o, y_o) = \underline{\quad \sqrt{2}e^2 \quad}$.

2 pt.

9. Sia Γ l'arco piano di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(t) = \sin^3 t \\ y(t) = \cos^3 t, \end{cases} \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

2 pt.

Allora la lunghezza dell'arco $\sigma_1(\Gamma) = \underline{\quad 3/2 \quad}$.

10. Sia data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = \arctan(\frac{6}{\pi}x - y) + \sin(xy)$. Detta $z = g(x, y)$ l'equazione del piano tangente nel punto $P(\frac{\pi}{2}, 2, f(\frac{\pi}{2}, 2))$ alla superficie S grafico della f , risulta $g(\frac{3}{2}\pi, 4) = \underline{\hspace{2cm}} 2 - \frac{11}{4}\pi \underline{\hspace{2cm}}$

2 pt.

SECONDA PARTE

11. Sia $f(x) = \frac{x^5 \sin |x|}{x^4 + 3}$, definita $\forall x \in \mathbb{R}$. Quali delle seguenti proprietà ha f in tutto il suo dominio?
 A) continua, B) derivabile, C) sup. limitata, D) inf. limitata, E) monotona, F) periodica, G) pari, H) dispari. La risposta è: **A B H**

3 pt.

12. Enunciare il teorema di Rolle per una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Soluzione: ...

3 pt.

13. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ un parametro. L'integrale improprio $\int_1^{+\infty} x e^{\alpha x} dx$ è convergente per:

- (a) $\alpha < -1$
 (b) nessun $\alpha \in \mathbb{R}$
 (c) $\alpha > 1/2$
☒ (d) $\alpha < 0$
 (e) tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$
 (f) $\alpha \leq 0$

4 pt.

14. Si considerino le serie numeriche

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + \sin n}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^2 + 2}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3 + 1}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!}$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + \sin n}{\ln(n+1)}$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2 \ln(n+1)}$

4 pt.

Allora, le serie convergenti sono : **1, 3, 4, 6**