Analisi Matematica 2 - 31 Marzo 2015

1. Sia $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x \geq 0,\ y \geq \frac{3}{2}x,\ y \leq 3\}$. Determinare massimo e minimo assoluti della funzione
$$f(x, y) = 9x^2 + 4y^2,$$
nel compatto K.

2. Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da
$$f(x, y) = e^{x^2-y^2},$$
utilizzando la definizione, determinare la derivata direzionale di f nel punto $P(2, 1)$ lungo il versore $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$.

3. Determinare l'integrale particolare, soluzione del Problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = \dfrac{9 - y^2}{4 - x^2} \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

4. Si consideri la serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n + 1)^2 \ln(n + 2)}$; determinare gli insiemi I e J di convergenza semplice ed assoluta della serie.

5. Dato l'arco Γ della parabola di equazione $y = x^2$ con $0 \leq x \leq 1$, calcolare
$$\int_\Gamma 2x\, d\sigma_1.$$

6. Verificare che l'equazione $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{16} - 3 = 0$ è univocamente risolubile rispetto a tutte e tre le variabili in un intorno del punto $P(2, 3, 4)$. Determinare, quindi, l'equazione della retta normale alla superficie Σ definita dall'equazione nel punto P.

7. Calcolare l'integrale doppio
$$\int_\Omega \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\, dxdy,$$
dove $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ x \leq y \leq \frac{\sqrt{3}}{2}x\}$.

8. Calcolare l'equazione del piano tangente alla superficie Σ grafico della funzione
$$f(x, y) = \sin(x^2 - y)$$
nel punto $P(\sqrt{2}, 2, f(\sqrt{2}, 2))$.