Analisi Matematica 2 - 28 Marzo 2014

1. Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = xe^{y^2+x}$ e il versore $\mathbf{v} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, calcolare la derivata direzionale $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}$ nel punto $P(0, 0)$ **secondo la definizione**, giustificando tutti i passaggi.

2. Determinare il massimo ed il minimo assoluti di $f(x, y) = xe^{y^2-x}$ nel compatto $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x-1)^2 + y^2 \le 1\}$.

3. Determinare l'integrale generale del sistema lineare omogeneo $\underline{z}' = \mathbb{A}\underline{z}$, dove
$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Sia Σ la porzione di superficie di equazione cartesiana $z = x^2 + y^2$ che si proietta nel triangolo K che hai vertici nei punti $O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(1, 1)$. Calcolare $\displaystyle\int_\Sigma \frac{\ln(1 + x + y)}{\sqrt{1 + 4z}}\, d\sigma_2$.

5. Determinare gli intervalli I e J di convergenza semplice ed assoluta della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{(n+3)^2 \ln n}$, senza trascurare di studiare il comportamento della serie agli estremi di I e J.

6. Dato l'arco Γ di equazioni parametriche
$$\begin{cases} x = t, \\ y = t^4, \end{cases}$$
con $t \in [0, 1]$, calcolare $\displaystyle\int_\Gamma 36xy\, d\sigma_1$.

7. Dopo aver verificato che l'equazione $y^4 - 4y + e^{2x} + 2x^2 - 1 = 0$ è univocamente risolubile rispetto a y in un intorno del punto $O(0, 0)$, scrivere l'equazione della retta tangente in O alla curva Γ, luogo dei punti di $\mathbb{R}^2$ che verificano l'equazione.

8. Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da
$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{9x^2 y}{16x^2 + 16y^2} & \text{se } (x, y) \ne (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$
calcolare, se esistono, tutte le derivate direzionali di f nel punto $O(0, 0)$ e dire quindi se f è differenziabile in O, giustificando la risposta.