Analisi Matematica 2 - 25 Febbraio 2015

1. Sia $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad y > -1\}$. Data la funzione $f : A \to \mathbb{R}$ definita da
$$f(x, y) = x^2 \ln(1 + y) + x^2 y^2,$$
determinare massimi e minimi relativi liberi di f in A.

2. Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 1)^2$, **utilizzando la definizione**, determinare la derivata direzionale di f in $(0, 0)$ lungo il versore $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$.

3. Determinare l'integrale generale del sistema lineare omogeneo
$$\underline{z}' = \mathbb{A}\underline{z}, \qquad \text{dove} \qquad \mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Determinare l'integrale particolare del Problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = -x \tan y \\ y(0) = \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$$

5. Si consideri la serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+3}(x-2)^n$; determinare gli insiemi I e J di convergenza semplice ed assoluta della serie.

6. Dato l'arco Γ di equazioni parametriche $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$ con $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$, calcolare $\displaystyle\int_\Gamma \sqrt[3]{\frac{y}{x}}\, d\sigma_1$.

7. Verificare che $\forall\, a \in \mathbb{R}$ l'equazione $xy^2 + y + \sin xy + a(e^x - 1) = 0$ è univocamente risolubile rispetto a y in un intorno del punto $O(0, 0)$ e che la funzione $g = g(x)$ implicitamente definita, risulta di classe C^∞. Al variare di $a \in \mathbb{R}$ calcolare poi il valore di $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{g(x) + ax}{x^2}$.

8. Calcolare l'integrale doppio
$$\int_\Omega \frac{x}{(x^2+y^2)^2}\, dxdy,$$
dove $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x^2 + y^2 \leq 1,\ 0 \leq y \leq x\}$.