Analisi Matematica 2 - 19 Giugno 2014

1. Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{9x^4 + y^4}{\sqrt{16x^2 + 16y^2}} & \text{se } \ (x,y) \neq (0,0), \\ 0 \qquad \text{se } \ (x,y) = (0,0), \end{cases}$$
calcolare, se esistono, tutte le derivate direzionali di f nel punto $O(0,0)$ e dire quindi se f è differenziabile in O, giustificando la risposta.

2. Determinare il massimo ed il minimo assoluti di $f(x,y) = x^2 e^{x^2 - y^2}$ nel compatto $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ -x \leq y \leq x, \ \ 0 \leq x \leq 1\}$.

3. Determinare autovalori ed autosoluzioni del problema ai limiti omogeneo
$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \\ y'(0) = y'(1) = 0, \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

4. Si consideri $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ la forma differenziale lineare
$$\omega = (4x^3 \cos(4y) + y)\, dx + (x + (\alpha + 2)x^4 \sin(4y))\, dy;$$
determinare per quale α la forma è esatta in $\mathbb{R}^2$ e in corrispondenza di tale valore calcolare il potenziale che si annulla in $(0,0)$.

5. Si consideri la serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{9^n x^{2n+3}}{(n+1)(2n+3)}$; determinare l'insieme I di convergenza semplice della serie e, indicata $\forall\, x \in I$ con $f(x)$ la somma della serie, calcolare l'espressione di $f'(x)$.

6. Dato l'arco Γ di equazioni parametriche $\begin{cases} x = \cos^2 t \\ y = \sin^2 t \end{cases}$ con $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, calcolare $\displaystyle\int_\Gamma xy\, d\sigma_1$.

7. Verificare che l'equazione $\ln(x+y) + \sin(\pi x) + ye^x = 0$ è univocamente risolubile sia rispetto a y, sia rispetto a x in un intorno del punto $P(1,0)$. Scrivere, quindi, l'equazione della retta normale in P a Γ, luogo degli $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ che verificano l'equazione.

8. Calcolare l'integrale di superficie $\displaystyle\int_\Sigma y^2\, d\sigma_2$, dove Σ è la superficie cartesiana di equazione $z = x^2 - y^2$ con $(x,y) \in T$ e $T = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9, \ x \geq 0, \ -x \leq y \leq x.\}$