

1) Determinare il massimo e il minimo assoluti della funzione

$$f(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 1)^2$$

nel compatto $K = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \geq y^3, y \geq x^3, x \geq 0\}$.

2) Verificare che l'equazione

$$(x + y)^2 + (x + z)^2 + (y + z)^2 - 2z^6 + x^2y^2 = 0$$

è univocamente risolubile rispetto a z in un intorno del punto $P = (0, 0, 1)$. Scrivere, quindi, l'equazione del piano tangente in P alla superficie S individuata dall'equazione.

3) Determinare la soluzione del Problema di Cauchy $\begin{cases} y' = 2y - y^2 \\ y(0) = 1. \end{cases}$

Si noti che l'equazione può essere considerata sia come equazione di Bernoulli, sia come equazione a variabili separabili.

4) Determinare l'insieme di convergenza della serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}$.

5) Detta $f(x)$ la funzione somma della serie del precedente esercizio, applicare due volte il Teorema di derivazione per serie e calcolare l'espressione di $f''(x)$, giustificando con cura tutti i passaggi. Dedurre quindi da ciò l'espressione esplicita di $f(x)$.

6) Si consideri l'insieme misurabile $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, -4y^2 \leq x \leq y^2\}$. Calcolare il valore di $\int_D ye^x dx dy$.

7) Si consideri la curva Γ di parametrizzazione $\begin{cases} x = t(1-t) \\ y = t^2(1-t) \end{cases}$, $t \in (\frac{1}{4}, 1)$. Determinare il punto $P \in \Gamma$ in cui il vettore tangente alla curva è parallelo al versore $\mathbf{v} = (0, 1)$.

8) Calcolare il valore dell'integrale curvilineo $\int_l \frac{y}{x} d\sigma_1$ dove l è l'arco di parabola di equazione $y = x^2$ con $x \in [1, 2]$.