Analisi Matematica 2 - 4 Settembre 2014

1. Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$
calcolare, se esistono, tutte le derivate direzionali di f nel punto $O(0,0)$ e dire quindi se f è differenziabile in O, giustificando la risposta.

2. Determinare il massimo ed il minimo assoluti di $f(x,y) = x^2 + y^2$ nel compatto $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} \leq 1, \ \ y \geq \dfrac{2}{3}x, \ \ y \leq \dfrac{3}{2}x\}$.

3. Determinare autovalori ed autosoluzioni del problema ai limiti omogeneo
$$\begin{cases} z'' - 2kz' + 2k^2 z = 0, \\ z'(0) = z(1) = 0, \end{cases} \qquad k > 0.$$

4. Si consideri $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ la forma differenziale lineare
$$\omega = \frac{\alpha^3 x}{(x^2+y^2)^3}\, dx + \frac{y}{(x^2+y^2)^3}\, dy;$$
determinare per quale α la forma è esatta in $\{x > 0\}$ e in corrispondenza di tale valore calcolare il potenziale che si annulla in $(2,0)$.

5. Si consideri la serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+3}}{(n+1)(n+3)(n+5)}$; determinare gli insiemi I e J di convergenza semplice ed assoluta della serie.

6. Dato l'arco Γ di equazioni parametriche $\begin{cases} x = \cos^4 t \\ y = \sin^4 t \end{cases}$ con $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, calcolare $\displaystyle\int_\Gamma \frac{1}{\sqrt{x+y}}\, d\sigma_1$.

7. Dopo aver verificato che il sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 18, \\ x - y + z = 0, \end{cases}$ è univocamente risolubile rispetto a (y,z) in un intorno del punto $P(3,3,0)$, scrivere, quindi, l'equazione della retta <u>tangente</u> in P a Γ, luogo degli $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ che verificano il sistema.

8. Calcolare l'area del dominio piano
$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1, \ \ y \geq \frac{2}{3}x, \ \ x \geq 0\}.$$