Simulazione prova di Analisi Matematica I - Tempo a disposizione: 2 h 30 m

Matricola:

Cognome e nome:

A1. Calcolare $\left(\frac{z}{|z|} - i\frac{|z|}{z}\right)\left(\frac{z}{|z|} + i\frac{|z|}{z}\right)$ per $z = 1 + 2i$.

A2. Sia $f(x) = e^{|x^2 - 5x + 6|}$. Determinare i punti di minimo assoluto e il punto di massimo relativo di f in $\mathbb{R}$.

A3. Calcolare la retta tangente al grafico della funzione $F(x) = 1 + \int_{\pi}^x \cos^3(t) dt$ nel punto di ascissa π .

A4. * Calcolare il valore del limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos\left(\frac{2}{x}\right) + \ln\left(1 + \frac{2}{x^2}\right) - 1}{\tan\left(\frac{3}{x^4}\right)}$.

A5. Stabilire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n \sin(n) + n^2}{n^\alpha - 3 \ln(n+1)}$ converge.

A6. Si consideri la successione $a_n = n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$. Si calcoli $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{a_n} (3 - x^3) dx$.

A7. * Scrivere l'integrale generale dell'equazione omogenea $y'(x) + \frac{2}{x}y(x) = 0$ nell'intervallo $(0, +\infty)$.

Determinare tutte le soluzioni dell'equazione non omogenea $y'(x) + \frac{2}{x}y(x) = \frac{1}{x^2[1+(7x)^2]}$ nell'intervallo $(0, +\infty)$.

A8. Calcolare $\int_0^{1/2} [(4x^2 + 2)3\pi \cos(3\pi x) + 8x \sin(3\pi x)] dx$.

B1. Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monotona crescente. Allora **A** $f'(x) \geq 0 \forall x \in [a, b]$. **B** $f'(x) > 0 \forall x \in [a, b]$.
 C $\forall x_1, x_2 \in [a, b], x_1 \neq x_2, \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \geq 0$. **D** $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.

B2. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convessa e derivabile. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Allora **A** $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$ per $h > 0$. **B** $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} < f'(x_0)$ per $h > 0$. **C** $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq f'(x_0)$ per $h > 0$.
 D $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} > f'(x_0)$ per $h > 0$.

B3. Si consideri $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b) , con $f(a) < 0, f(b) > 0$. Allora:
 A $\exists c \in (a, b)$ tale che $[f(b) - f(a)]f'(c) = 0$. **B** $\exists c \in (a, b)$ tale che $[f(b) - f(a)]f'(c) > 0$. **C** $\forall c \in (a, b)$ risulta $f'(c) > 0$. **D** $\exists c \in (a, b)$ tale che $[f(b) - f(a)]f'(c) < 0$.

B4. * Sia $f(x) \sim x \ln x$ per $x \rightarrow 0^+$ e sia $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile. **A** Se $g(0) = 0$ allora $f(x) \cdot g(x) = o(x^{3/2})$ per $x \rightarrow 0^+$. **B** Se $g'(0) = 1$ allora $f(x) \cdot g(x) \sim x^2 \ln x$ per $x \rightarrow 0^+$. **C** Se $g(0) \neq 0$ allora $f(x) \cdot g(x) \sim x \ln x$ per $x \rightarrow 0^+$. **D** Se $g(0) = 0$ allora $f(x) \cdot g(x) \sim g'(0)x^2$ per $x \rightarrow 0^+$.

B5. Sia $b \in (-\infty, 0)$ tale per cui la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} b^n$ converga. Allora la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} (b+1)^n$
 A è indeterminata (oscilla) **B** converge **C** diverge a $+\infty$ **D** diverge a $-\infty$.

B6. * Sia $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione tale che $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = l > 0$. Allora **A** esiste $\delta > 0$ tale che $f(x) > 0$ per ogni $x \in (1, 1 + \delta)$ **B** $f(1) = l$ **C** esiste $\delta > 0$ tale che $f(x) > l$ per ogni $x \in (1 - \delta, 1 + \delta)$ **D** esiste $\delta > 0$ tale che $f(x) > 0$ per ogni $x \in (1 - \delta, 1 + \delta)$.

B7. Si considerino le soluzioni dell'equazione differenziale $u'(x) = \lambda u(x)$ per $x \in [0, +\infty)$. **A** Se $\lambda > 0$ e $u(0) > 0$ allora u è crescente. **B** Se $\lambda < 0$ e $u(0) < 0$ allora u è convessa. **C** Se $\lambda < 0$ e $u(0) > 0$ allora u è crescente. **D** Se $\lambda > 0$ e $u(0) < 0$ allora u è convessa.

B8. Sia $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $F(x) := \int_1^{x^2} \sqrt[3]{t-1} dt$. Allora **A** $F \notin C^1(\mathbb{R})$. **B** F' è limitata.
 C $F'(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$. **D** F non ha punti stazionari.