

ESERCIZI ASSEGNATI IL GIORNO 11/1/2018

Dire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge

$$\int_0^{+\infty} \frac{x - \sqrt{x}}{(x^{2\alpha} + x^{5\alpha}) \ln x} dx$$

Osserviamo che f ha punti critici in $x=0$, $x=1$, $x \rightarrow +\infty$.

Cominciamo da $x \rightarrow +\infty$.

$$\underline{\alpha > 0} \quad \text{pp } f(x) = \frac{x}{x^{5\alpha} \ln x} = \frac{1}{x^{5\alpha-1} \ln x}$$

$$\underline{\alpha \leq 0} \quad \text{pp } f(x) = \frac{x}{x^{2\alpha} \ln x} = \frac{x^{1+2|\alpha|}}{\ln x}$$

E' chiaro che se $\alpha < 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{1+2|\alpha|}}{\ln x} = +\infty$ e l'integrale non può convergere.

Dalle proprietà note di integrabilità di $\frac{1}{x^\beta}$ e di $\frac{1}{x(\ln x)^\beta}$ per $x \rightarrow +\infty$, ricaviamo che deve essere

$$\alpha > 0 \quad \Rightarrow \quad 5\alpha - 1 > 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha > \frac{2}{5}$$

Consideriamo il comportamento in $x=0$. Abbiamo, tenendo conto che dal punto precedente necessariamente α è positivo

$$\text{pp } f(x) = - \frac{\sqrt{x}}{x^{2\alpha} \ln x} = - \frac{1}{x^{2\alpha-\frac{1}{2}} \ln x}$$

Dall'integrabilità di $\frac{1}{x^\beta}$ e di $\frac{1}{x|\ln x|^\beta}$ per $x \rightarrow 0$, ricaviamo che deve essere

$$2\alpha - \frac{1}{2} < 1$$

$$\alpha < \frac{3}{4}$$

Infine, per quanto riguarda $x=1$, abbiamo

$$\text{pp } f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{2 \ln x} = \frac{\sqrt{x} - 1}{4 \ln \sqrt{x}}$$

Poiché

$$t = 1 \quad \ln t = t - 1 + o(t-1)$$

sarà

$$x = 1 \quad \ln \sqrt{x} = \sqrt{x} - 1 + o(\sqrt{x} - 1)$$

Dunque

$$\text{pp } f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{4(\sqrt{x} - 1 + o(\sqrt{x} - 1))}$$

La funzione è limitata in un intorno di $x=1$ e, dunque, sicuramente integrabile.

Concludiamo che deve essere

$$\frac{2}{5} < \alpha < \frac{3}{4}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\left(\frac{\pi}{2} + \arctg \frac{1}{x}\right)^\alpha |x|^{\frac{1}{2}-2\alpha}}{x^4 + \ln^2 |x|} dx$$

I punti critici sono $x=0$ e $x \rightarrow +\infty$.

Per quanto riguarda $x \rightarrow +\infty$ abbiamo

$$\text{pp } f = \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^\alpha x^{\frac{1}{2}-2\alpha}}{x^4} = \frac{\left(\pi/2\right)^\alpha}{x^{7/2+2\alpha}}$$

Dovrà essere

$$\frac{7}{2} + 2\alpha > 1$$

$$2\alpha > -\frac{5}{2}$$

$$\alpha > -5/4$$

Per $x=0$

$$\begin{aligned} \text{pp } f(x) &= \frac{\pi^\alpha |x|^{1/2-2\alpha}}{\ln^2 x} \\ &= \frac{\pi^\alpha}{x^{2\alpha-1/2} \ln^2 x} \end{aligned}$$

Osserviamo che:

1) Se $2\alpha - \frac{1}{2} = 1$ otteniamo

$$\text{pp } f = \frac{\pi^\alpha}{x \ln^2 x}$$

che è integrabile per cui

$$g(x) = \frac{1}{x |\ln x|^\beta} \text{ è integrabile}$$

in un intorno di $x=0 \quad \forall \beta > 1$

Quindi per $\alpha = \frac{3}{4}$ f è integrabile

2) Se $2\alpha - \frac{1}{2} < 1$ otteniamo, posto $c = 2\alpha - \frac{1}{2}$,

$$\text{pp } f(x) = \frac{\pi^\alpha}{x^c \ln^2 x} \leq \frac{\pi^\alpha}{x^c}$$

che è integrabile, perché $g(x) = \frac{1}{x^c}$ è integrabile
in un intorno di $x=0 \quad \forall c < 1$

Quindi per $\alpha < \frac{3}{4}$ f è integrabile.

Complessivamente, dunque

$$-\frac{5}{4} < \alpha \leq \frac{3}{4}$$