

$$1] A = \{x \in \mathbb{Q} : 1 < x^2 < 3\} \quad \text{Intendiamo } \underline{\underline{\Delta \in \mathbb{R}}}$$

Osserviamo che

$$x^2 > 1$$

$$x^2 - 1 > 0$$

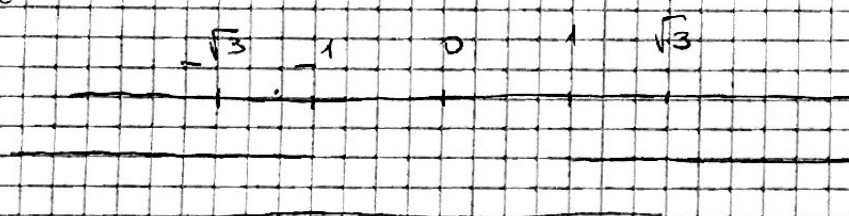
$$(x-1)(x+1) > 0 \quad \Rightarrow \quad x < -1 \quad x > 1$$

$$x^2 < 3$$

$$x^2 - 3 < 0$$

$$(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) < 0 \quad \Rightarrow \quad -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$$

Quindi



Concludiamo che

$$\Delta = \{x \in \mathbb{Q} : -\sqrt{3} < x < -1\} \cup \{x \in \mathbb{Q} : 1 < x < \sqrt{3}\}$$

E' evidente dalla definizione vista a lezione che

$$\inf \Delta = -\sqrt{3}$$

$$\sup \Delta = \sqrt{3}$$

Si noti che  $\inf \Delta$  e  $\sup \Delta$  non sono razionali.

Massimo e minimo non esistono

$$2] A = \{x \in \mathbb{Q} : -1 < x^2 < 3\} \quad \text{Intendiamo } \underline{\underline{\Delta \in \mathbb{R}}}$$

Poiché  $\forall x \in \mathbb{Q} \quad x^2 \geq 0$  è chiaro che  $x^2 > -1$  è sempre verificata.

Ci riduciamo, quindi, a  $x^2 < 3$ , che comporta

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}\}$$

Anche in questo caso

$$\sup A = \sqrt{3}$$

$$\inf A = -\sqrt{3}$$

Anche in questo caso,  $\inf A$   
e  $\sup A$  non sono razionali

Osservazione Se intendiamo nei due esempi precedenti

$A \subseteq \mathbb{Q}$  (e non  $\mathbb{R}$ ), allora in entrambi i casi l'estremo superiore e l'estremo inferiore non esistono, perché  $\pm\sqrt{3}$  non sono numeri razionali.

Si vede, dunque, l'importanza rappresentata dall'Assioma di continuità nel caratterizzare i reali, rispetto ai razionali.

$$3] \quad A = \{x \in \mathbb{Z} : -1 \leq x < 12\}$$

$$= \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$$

$$\sup A = \max A = 11$$

$$\inf A = \min A = -1$$

$$4] \quad A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 > 3\}$$

$$x^2 > 3$$

$$x^2 - 3 > 0$$

$$(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) > 0$$

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x < -\sqrt{3}\} \cup \{x \in \mathbb{Q} : x > \sqrt{3}\}$$

In questo caso,  $A$  non è superiormente limitato e non è inferiormente limitato. Quindi  $\sup A$  e  $\inf A$  non esistono. [preciseremo in seguito una scrittura alternativa per caratterizzare questa nozione]