ESERCIZIO ASSEGNATO IL GIORNO 8/11/2017

$$\lim_{x \to +\infty} 2^x = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} 2^x = 0.$$

Dire che $\lim_{x \to +\infty} 2^x = +\infty$ vuol dire che

$\forall K > 0 \quad \exists M_K > 0$ t.c. $\forall x \in (M_K, +\infty)$ risulta
$f(x) \in (K, +\infty)$

Dire $f(x) \in (K, +\infty)$ è equivalente a $f(x) > K$.
Quindi

$$2^x > K$$
$$x > \log_2 K$$

La condizione $x \in (M_K, +\infty)$ è soddisfatta ponendo
$M_K = \log_2 K$

Dire che $\lim_{x \to -\infty} 2^x = 0$ vuol dire che

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K_\varepsilon > 0$ t.c. $\forall x \in (-\infty, -K_\varepsilon)$
risulta $f(x) \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

Dire $f(x) \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ è equivalente a porre $-\varepsilon < f(x) < \varepsilon$
Quindi

$$-\varepsilon < 2^x < \varepsilon$$

La disuguaglianaza $-\varepsilon < 2^x$ è sempre verificata, perchè
$2^x > 0 \quad \forall x$. Abbiamo

$$2^x < \varepsilon \qquad x < \log_2 \varepsilon \qquad x < -\left|\log_2 \frac{1}{\varepsilon}\right|$$

Tutto è soddisfatto, ponendo $K_\varepsilon = \log_2 1/\varepsilon$.