

ESERCIZI ASSEGNATI IL 7/11/2017

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$$

Ciò significa che

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 \text{ t.c. } \forall x \in (2 - \delta_\varepsilon, 2 + \delta_\varepsilon), x \neq 2 \\ \text{risulta} \quad x^2 \in (4 - \varepsilon, 4 + \varepsilon)$$

Partiamo da $x^2 \in (4 - \varepsilon, 4 + \varepsilon)$.

È equivalente a dire

$$4 - \varepsilon < x^2 < 4 + \varepsilon$$

Osserviamo che

$$x^2 > 4 - \varepsilon$$

$$x^2 - (4 - \varepsilon) > 0$$

$$(x - \sqrt{4 - \varepsilon})(x + \sqrt{4 - \varepsilon}) > 0$$

Dunque

$$x < -\sqrt{4 - \varepsilon} \quad , \quad x > \sqrt{4 - \varepsilon}$$

D'altro canto

$$x^2 < 4 + \varepsilon$$

$$x^2 - (4 + \varepsilon) < 0$$

$$(x - \sqrt{4 + \varepsilon})(x + \sqrt{4 + \varepsilon}) < 0$$

$$-\sqrt{4 + \varepsilon} < x < \sqrt{4 + \varepsilon}$$

Dovendo valere entrambe le condizioni insieme, abbiamo

ma



Quindi, otteniamo che

$$\sqrt{4-\varepsilon} < x < \sqrt{4+\varepsilon}$$

(l'altro caso non interessa qui)

$$\sqrt{4+\varepsilon} = \sqrt{4(1+\varepsilon/4)} = 2\sqrt{1+\varepsilon/4} = 2 + \delta_1$$

dove

$$\delta_1 = 2\sqrt{1+\varepsilon/4} - 2$$

$$\sqrt{4-\varepsilon} = \sqrt{4(1-\varepsilon/4)} = 2\sqrt{1-\varepsilon/4} = 2 - \delta_2$$

dove

$$\delta_2 = 2 - 2\sqrt{1-\varepsilon/4}$$

Sera-

$$\delta_\varepsilon = \min \{ \delta_1, \delta_2 \}$$

Proviamo di determinare chi sia il più piccolo.

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$$

Cio' significa che

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 \text{ t.c. } \forall x \in (-\delta_\varepsilon, \delta_\varepsilon), x \neq 0, \\ \text{risulta} \quad e^x \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$$

Partiamo da $e^x \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$.

Cio' equivale a dire

$$1-\varepsilon < e^x < 1+\varepsilon$$

Per la monotonia della funzione logaritmo, cio' equivale a dire che $\ln(1-\varepsilon) < x < \ln(1+\varepsilon)$

Osserviamo che

$$\ln(1+\varepsilon) > 0$$

$$\ln(1-\varepsilon) < 0$$

Come nell'esempio precedente, se poniamo

$$\delta_1 = \ln(1+\varepsilon)$$

$$\delta_2 = |\ln(1-\varepsilon)| = -\ln(1-\varepsilon)$$

sarà

$$\delta_\varepsilon = \min \{ \delta_1, \delta_2 \}$$

Osserviamo che

$$\delta_1 < \delta_2$$

ossia

$$\ln(1+\varepsilon) < -\ln(1-\varepsilon)$$

Infatti

$$\ln(1+\varepsilon) < -\ln(1-\varepsilon)$$

è equivalente a

$$\ln(1+\varepsilon) + \ln(1-\varepsilon) < 0$$

$$\ln[(1-\varepsilon)(1+\varepsilon)] < 0$$

$$\ln(1-\varepsilon^2) < 0$$

e questo è ovvio perché $1-\varepsilon^2 < 1$ e il logaritmo è, dunque, negativo.