PIANO TANGENTE

① Determinare l'equazione del piano tangente alla superficie S di equazione

$$z = \operatorname{arctg}[(x+1)y] - ye^{x} \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

nel punto $P(0, 1, z(0,1))$.

② Scrivere l'equazione del piano tangente alla superficie S di equazione

$$z = \operatorname{arctg}(y - e^{2x}) \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

nel punto $P(0, 2, z(0,2))$.

③ Determinare l'equazione del piano tangente alla superficie S di equazione

$$z = \sin(x^2 - y)$$

nel punto $P(\sqrt{2}, 2, z(\sqrt{2}, 2))$.

④ Determinare l'equazione del piano tangente alla superficie S di equazione

$$z = e^{6xy} + 6x^2\cos(6y)$$

nel punto $P(-1, 0, z(-1,0))$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

① Determinare la soluzione del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 9y = -36 + 20e^{-x} \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

② Determinare la soluzione del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 4y' + 5y = \sin 2x \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

③ Determinare la soluzione del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{9 - y^2}{4 - x^2} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

osservando che l'equazione è a variabili separabili.

④ Determinare la soluzione del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''' + 2y'' - 3y' = 9x^2 \\ y(0) = \frac{7}{2}, \quad y'(0) = -\frac{14}{3}, \quad y''(0) = -4 \end{cases}$$

⑤ Determinare la soluzione del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = x(1 + y^2) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

⑥ Determinare la soluzione del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 2y - y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

MASSIMI E MINIMI

1) Determinare il massimo e il minimo assoluti di

$$f(x,y) = 16x^2 + 9y^2$$

nel compatto $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 2, \; x^2 - 4 \leq y \leq 4 - x^2\}$

2) Determinare il massimo e il minimo assoluti di

$$f(x,y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$$

nel compatto $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 1 - \frac{x^2}{2}\}$

3) Determinare il massimo e il minimo assoluti di

$$f(x,y) = x^3 - y^3$$

nel compatto $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq -x^3, \; y \geq -1, \; x \geq 0\}$

4) Determinare il massimo e il minimo assoluti di

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

nel compatto $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, \; y \geq 0, \; y \geq \frac{1}{3}(x^2 - 1),$
$y \leq \sqrt{3x+1}, \; y \leq 3 - x\}$

5) Determinare il massimo e il minimo assoluti di

$$f(x,y) = (x-4)\cos(x+y)$$

nel compatto $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| - 1 \leq y \leq 1 - |x|\}$

INTEGRALI DOPPI

① Si consideri $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, \; -4y^2 \leq x \leq y^2\}$.

Calcolare $\displaystyle\int_D y e^x \, dx\, dy$

② Si consideri $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, \; x^2 - 1 \leq y \leq \frac{1-x^2}{4}\}$.

Calcolare $\displaystyle\int_D xy \, dx\, dy$

③ Si consideri $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2+y^2 \leq 2, \; |x| \leq y\}$.

Calcolare $\displaystyle\int_D x^2 y \, dx\, dy$ [Utilizzare le coordinate polari]

④ Si consideri

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2+y^2 \leq 4, \; x \geq 0, \; y \geq 0, \; \frac{\sqrt{3}}{3} \leq y \leq x\right\}.$$

Calcolare

$$\int_D \frac{e^{\operatorname{arctg} y/x}}{1+x^2+y^2} \, dx\, dy$$

⑤ Si consideri $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y-1)^2 \leq 1, \; y \leq x\}$.

Calcolare

$$\int_D xy \, dx\, dy$$

⑥ Si consideri $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, \; x^2 \leq y \leq 1 - x^2\}$.

Calcolare

$$\int_D \frac{1}{(1+3x^2+y)^2} \, dx\, dy$$

INTEGRALI CURVILINEI di I SPECIE

① Determinare la lunghezza dell'arco Γ di equazioni parametriche

$$\Gamma : \begin{cases} x = \sin^3 t \\ y = \cos^3 t \end{cases} \qquad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

② Calcolare

$$\int_\Gamma \sqrt{6x + y^2 + z^2} \, d\sigma_1$$

dove

$$\Gamma : \begin{cases} x = \frac{3}{2} t^2 \\ y = 2 \sin t \\ z = 2 \cos t \end{cases} \qquad t \in [1, 2]$$

③ Dato l'arco Γ di equazione $\rho = e^\vartheta$ con $\theta \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$, calcolare

$$\int_\Gamma \frac{y}{y^2 - x^2} \, d\sigma_1$$

④ Dato l'arco Γ di equazione $\rho = \frac{1}{\theta}$ con $\theta \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$, calcolare

$$\int_\Gamma \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) d\sigma_1$$

⑤ Dato l'arco Γ $y = x^2$ con $x \in [0, 1]$, calcolare $\int_\Gamma 2x \, d\sigma_1$

INTEGRALI di SUPERFICIE

① Calcolare l'area della superficie Σ di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = \operatorname{Ch} u \cos v \\ y = \operatorname{Ch} u \sin v \\ z = \operatorname{Sh} u \end{cases} \qquad (u,v) \in (0,1) \times (0,\pi)$$

② Calcolare l'area della superficie Σ di equazione parametriche

$$\begin{cases} x = 3\cos u \sin v \\ y = 3 \sin u \sin v \\ z = 3\cos v \end{cases} \qquad (u,v) \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right) \times \left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$$

③ Sia Σ la porzione di superficie di equazione $z = 2x + y^2$ che si proietta nel triangolo T che ha vertici nei punti $(4,0)$, $(4,2)$, $(0,2)$.
Calcolare

$$\int_\Sigma \frac{z-y^2}{\sqrt{5+4y^2}}\, d\sigma_2$$

④ Sia Σ la porzione di superficie di equazione $z = 3x - \sqrt{6}\,y + 2$ che si proietta nel triangolo T che ha vertice nei punti $(0,0)$, $(-1,0)$, $(1,1)$.
Calcolare

$$\int_\Sigma y^2\, d\sigma_2$$

⑤ Calcolare

$$\int_\Sigma y^2\, d\sigma_2$$

dove Σ è la superficie cartesiana di equazione $z = x^2 - y^2$ che si proietta nell'insieme

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 9,\ x \ge 0,\ -x \le y \le x\}$$

⑥ Sia Σ la porzione di superficie di equazione $z = x^2 + y^2$ che si proietta in

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1,\ x \ge 0,\ |y| \le x\}$$

Calcolare $\displaystyle\int_\Sigma \frac{\ln(1+x^2+y^2)}{\sqrt{1+4z}}\, d\sigma_2$

INTEGRALI CURVILINEI di II SPECIE

1. Dato ~~arco~~ il cammino Γ di equazioni $\begin{cases} x = t(1-t) \\ y = t^2 \end{cases}$ $t \in [0,1]$

calcolare
$$\int_\Gamma y\,dx + (x-1)\,dy$$

2. Calcolare
$$\int_\Gamma xy\,dx + x(y-1)\,dy$$

dove $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ è in figura