Appunti di Geometria Differenziale

Alessandro Ghigi

8 ottobre 2007

Indice

1 Richiami sulle funzioni di una variabile reale

Sia $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ un intervallo aperto della retta reale. Indichiamo con $C^0(I)$ l'insieme formato dalle funzioni continue a valori reali definite su I. Se $k > 0$ è un numero naturale, indichiamo con $C^k(I)$ l'insieme delle funzioni a valori reali che sono definite su I e che sono derivabili k volte in ogni punto di I e tali che tutte le derivate fino all'ordine k incluso siano continue su I. Se una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ appartiene all'insieme $C^k(I)$ diciamo che f è di classe C^k. Questa definizione si può riformulare in modo ricorsivo dicendo che una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ è di classe C^k (per $k > 0$) su I se e soltanto se f è derivabile in ogni punto di I ed $f' \in C^{k-1}(I)$. Poniamo infine

$$C^\infty(I) = \bigcap_{k=1}^{\infty} C^k(I).$$

L'insieme $C^\infty(I)$ è pertanto formato dalle funzioni a valori reali che sono definite su I e che sono ivi derivabili infinite volte. Tutte le derivate sono aumaticamente continue. Infatti è noto che se una funzione è derivabile in un punto essa è anche continua in quel punto. Se una funzione definita su I appartiene a $C^\infty(I)$ diciamo che f è di classe C^∞ su I o che f è una *funzione liscia* su I.

Lemma 1. *Sia $k \in \mathbb{N}$ oppure $k = \infty$. Se $f, g \in C^k(I)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, allora $f + g$, $f \cdot g$, $\lambda f \in C^k(I)$.*

Dimostrazione. È immediato verificare che $f + g$ e λf sono ancora di classe C^k. Resta da provare che l'insieme $C^k(I)$ è chiuso anche rispetto al prodotto. Procediamo per induzione su k. Se $k = 0$ l'enunciato è vero perché il prodotto di funzioni continue è una funzione continua. Sia ora $k > 0$ e supponiamo che l'insieme $C^{k-1}(I)$ sia chiuso rispetto al prodotto (questa è l'ipotesi induttiva.) Vogliamo dedurre che anche $C^k(I)$ è chiuso rispetto al prodotto. Siano dunque $f, g \in C^k(I)$. Poiché $k > 0$ sia f che g sono derivabili su I. Dunque anche il prodotto fg è derivabile e vale $D(fg) = f'\cdot g+f\cdot g'$. Ma le quattro funzioni f, f', g e g' appartendono tutte a $C^{k-1}(I)$. Poiché questo insieme è chiuso rispetto alla somma ed al prodotto (ipotesi induttiva), anche $D(fg)$ appartiene a C^{k-1}, dunque $fg \in C^k(I)$. Ciò dimostra che $C^k(I)$ è chiuso rispetto al prodotto. Per il principio di induzione il risultato vale per ogni k naturale. Che $C^\infty(I)$ sia chiuso rispetto al prodotto è conseguenza immediata del fatto che lo è $C^k(I)$ per ogni k. □

Lemma 2. *Se $f : I \to J$ è una funzione di classe C^k ed $u \in C^k(J)$, allora $u \circ f \in C^k(I)$.*

Dimostrazione. Anche in questo caso si procede per induzione su k. Per $k = 0$ il risultato è noto: la composizione di funzioni continue è continua. Sia $k > 0$ e supponiamo che la composizione di funzioni di classe C^{k-1} sia ancora della stessa classe (ipotesi induttiva.) Se $f \in C^k(I)$ ed $u \in C^k(J)$, allora f ed u sono derivabili poiché $k > 0$. Inoltre se $f(I) \subset J$ la funzione composta $u \circ f : I \to \mathbb{R}$ è ben definita, è derivabile e $D(u \circ f)(x) = u'(f(x)) \cdot f'(x)$, dunque $D(u \circ f) = (u' \circ f) \cdot f'$. Ma $u' \in C^{k-1}(J)$, e $f \in C^k(I) \subset C^{k-1}(I)$. Pertanto per l'ipotesi induttiva $u' \circ f \in C^{k-1}(I)$. D'altronde $f' \in C^{k-1}(I)$, e per il lemma predecente il prodotto $(u' \circ f) \cdot f'$ è di classe C^{k-1}. Dunque $D(u \circ f) \in C^{k-1}(I)$, ossia $u \circ f \in C^k(I)$. □

Esercizio 1. *Dimostrare che*

$$D^m \frac{1}{x} = (-1)^m \frac{m!}{x^{m+1}}. \tag{1}$$

(Suggerimento: procedere per induzione su m.)

Esercizio 2. *Se I è un intervallo aperto ed $f \in C^k(I)$ non si annulla mai su I, allora la funzione $g = 1/f$ è ancora di classe C^k su I.*

Esercizio 3. *Sia $f \in C^k(I)$ ed $x_0 \in I$. Per $x \in I$ poniamo*

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(\xi)d\xi.$$

(F è la funzione integrale di f.) Allora $F \in C^{k+1}(I)$.

Esercizio 4. *Dimostrare che $C^\infty \subsetneq C^k \subsetneq C^{k-1} \subsetneq \cdots \subsetneq C^1 \subsetneq C^0$. (Suggerimento: per $C^0 \subsetneq C^1$ si può sfruttare p.e. la funzione $x \mapsto |x|$. Il caso generale si può ricondurre a questo grazie all'esercizio precedente.)*

Definizione 3. *Siano I e J intervalli aperti della retta reale e $k > 0$. Un* diffeomorfismo di classe C^k *fra I e J è una funzione $h : I \to J$ tale che (1) $h \in C^k(I)$, (2) h è invertibile (cioè biunivoca) e (3) $h^{-1} \in C^k(J)$.*

È importante osservare che la terza condizione non segue dalle prime due. P.e. la funzione $h(x) = x^3$ è di classe C^∞ su tutto $\mathbb{R}$ ed è biunivoca da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$. La sua inversa $h^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$ è continua, dunque h è un omeomorfismo di $\mathbb{R}$ in sé. Tuttavia h^{-1} non è derivabile per $y = 0$, dunque h^{-1} non è di classe C^1. Pertanto h non è un diffeomorfismo C^1 anche se h è C^∞.

Sia $h : I \to J$ è un diffeomorfismo. Applicando la regola di derivazione della funzione composta alla composizione $h^{-1} \circ h$ e sfruttando il fatto che $h^{-1}(h(x)) = x$, otteniamo

$$(Dh^{-1})(h(x)) \cdot h'(x) = Dx = 1.$$

Pertanto $h'(x) \neq 0$ per ogni $x \in I$. Dunque la derivata di un diffeomorfismo non si annulla mai. (Nell'esempio predecente la derivata di x^3 si annulla in 0. Questo è un altro modo per verificare che h non è un diffeomorfismo.) La proposizione seguente dice che questa proprietà caratterizza i diffeomorfismi fra gli intervalli di $\mathbb{R}$.

Proposizione 4. *Sia $I \subset \mathbb{R}$ intervallo aperto, $k \geq 1$ ed $h : I \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^k. Supponiamo che $h'(x) \neq 0$ per ogni $x \in I$. Allora $J = h(I)$ è un intervallo aperto ed $h : I \to J$ è un diffeomorfismo C^k.*

Dimostrazione. Poiché la funzione h' è continua sull'intervallo I e non si annulla mai, essa è o sempre positiva o sempre negativa. Nella dimostrazione supponiamo che sia sempre positiva. Dunque h è strettamente crescente e in particolare iniettiva. Pertanto $h : I \to J$ è biunivoca. Inoltre poiché la funzione h è continua, ed I è un intervallo, l'immagine $J = h(I)$ è ancora un intervallo. Dimostriamo che J è aperto. Sia $y_0 \in J$ ed $x_0 \in I$ tale che $y_0 = h(x_0)$. Poiché I è aperto, esiste $\varepsilon > 0$ tale che $[x_o - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset I$. Poiché h è strettamente crescente $h(x_0 - \varepsilon) < y_0 < h(x_0 + \varepsilon)$. Dunque l'intervallo $(h(x_0 - \varepsilon), h(x_0 + \varepsilon))$ è un intorno di y_0 interamente contenuto in J. Pertanto J è aperto. Vediamo ora che h^{-1} è C^k. È noto che la funzione inversa è continua e derivabile e che la sua derivata è data da

$$Dh^{-1}(y) = \frac{1}{h'(h^{-1}(y))}. \tag{2}$$

Poiché $h \in C^1$, h' è continua, dunque anche Dh^{-1} è continua, cioè h^{-1} è C^1. Sia ora $1 < m < k$. Supponiamo di avere dimostrato che h^{-1} è C^m su J. Dunque $h' \circ h^{-1} \in C^m(J)$ per il Lemma 2. Dalla formula (2) e dall'Es. 2 segue che Dh^{-1} è pure C^m. Quindi $h^{-1} \in C^{m+1}$. Pertanto per il principio di induzione $h^{-1} \in C^k(J)$. $\square$

Lemma 5. *Siano $f \in C^1(a,b)$ e $g \in C^1(b,c)$. Supponiamo che esistano numeri $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$ tali che*

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = \lim_{x \to b^+} g(x) = y_0 \tag{3}$$

$$\lim_{x \to b^-} f'(x) = \lim_{x \to b^+} g'(x) = y_1. \tag{4}$$

(In altre parole stiamo supponendo che i limiti in questione esistano, che siano finiti e che valgano le eguaglianze indicate.) Allora la funzione

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & x \in (a,b) \\ y_0 & x = b \\ g(x) & x \in (b,c) \end{cases} \tag{5}$$

è di classe C^1 su (a,b) e la sua derivata è data da

$$F'(x) = \begin{cases} f'(x) & x \in (a,b) \\ y_1 & x = b \\ g'(x) & x \in (b,c) \end{cases} \tag{6}$$

Dimostrazione. La formula (3) dice che la funzione F è continua su (a,b). Sappiamo inoltre che F è C^1 su (a,b) e su (b,c) e che la derivata F' è ivi data dalla formula (6). Resta da provare che F è derivabile anche in b e che la derivata $F'(b) = y_1$. Seguirà immediatamente dalla (4) che F' è continua su tutto (a,c), cioè che $F \in C^1(a,c)$. Proviamo innanzitutto che

$$\lim_{x \to b^-} \frac{F(x) - F(b)}{x - b} = y_1. \tag{7}$$

Per la definizione di F

$$\lim_{x \to b^-} \frac{F(x) - F(b)}{x - b} = \lim_{x \to b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}.$$

Se $a < x < b$, per il Teorema di Lagrange (o Teorema del Valor medio) esiste un punto $\xi \in (x,b)$ tale che $f(x) - f(b) = f'(\xi)(x - b)$. Se $x \to b^-$, anche

$\xi \to b^-$, dunque

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} = \lim_{\xi \to b^-} f'(\xi) = y_1.$$

È così dimostrata la (7). Analogamente si verifica che

$$\lim_{x \to b^+} \frac{F(x) - F(b)}{x - b} = y_1.$$

Dunque

$$\lim_{x \to b} \frac{F(x) - F(b)}{x - b} = y_1.$$

Pertanto F è derivabile in b e $F'(b) = y_1$. □

Proposizione 6. *Sia $k \in \mathbb{N}$. Siano $f \in C^k(a, b)$ e $g \in C^k(b, c)$. Supponiamo che esistano numeri $y_0, y_1, \dots, y_k \in \mathbb{R}$ tali che per $i = 0, 1, \dots, k$ si abbia*

$$\lim_{x \to b^-} D^i f(x) = \lim_{x \to b^+} D^i g(x) = y_i. \tag{8}$$

Allora la funzione definita dalla formula (5) è di classe C^k su (a, b).

Dimostrazione. Il risultato è noto per $k = 0$. Procediamo per induzione su $k \geq 1$. Se $k = 1$ il risultato è stato dimostrato nel lemma precedente. Sia $k > 1$ e supponiamo (ipotesi induttiva) che il risultato sia vero per incollamenti di funzioni C^{k-1}. Siano f e g due funzioni che soddisfano le ipotesi della proposizione. Poiché $k > 1$, esse soddisfano anche le ipotesi del lemma precedente. Pertanto $F \in C^1(a, b)$. Per l'ipotesi induttiva applicata alle funzioni f' e g', la funzione

$$\varphi(x) = \begin{cases} f'(x) & x \in (a, b) \\ y_1 & x = b \\ g'(x) & x \in (b, c) \end{cases}$$

è C^{k-1} su (a, c). Ma per la (6) $\varphi = F'$. Dunque $F' \in C^{k-1}(a, c)$, ossia $F \in C^k(a,)$. □

Corollario 7. *Siano $f \in C^\infty(a, b)$ e $g \in C^\infty(b, c)$. Supponiamo che per ogni $i \in \mathbb{N}$ esista un numero $y_i \in \mathbb{R}$ tale che*

$$\lim_{x \to b^-} D^i f(x) = \lim_{x \to b^+} D^i g(x) = y_i. \tag{9}$$

Allora la funzione definita dalla formula (5) è di classe C^∞ su (a, b).

Dimostrazione. Basta applicare la proposizione precedente per ogni $k \in \mathbb{N}$. $\square$

Teorema 8. *Sia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita dalla formula*

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ e^{-1/x^2} & x > 0. \end{cases}$$

Allora $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Dimostrazione. Sia $f \in C^\infty((-\infty, 0)$ la funzione identicamente nulla e $g \in C^\infty((0, \infty)$ la funzione $g(x) = e^{-1/x^2}$. Dimostreremo che F è C^∞ applicando il corollario precedente alle funzioni f e g. È necessario calcolare dimostrare che i limiti delle derivate m-esime di f e di g per $x \to 0$ esistono, sono finiti e coincidono. Poiché le derivate di f sono identicamente nulle, è sufficiente dimostrare che per ogni $m \in \mathbb{N}$

$$\lim_{x \to 0^+} D^m g(x) = 0.$$

Cominciamo dimostrando che per ogni $m \in \mathbb{N}$ esiste un polinomio $p_m(t) \in \mathbb{R}[t]$ tale che

$$D^m g(x) = p_m\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2}. \tag{10}$$

Procediamo per induzione su m. Se $m = 0$ la formula (10) è vera se si sceglie il polinomio (costante) $p_0(t) = 1$. Supponiamo vera la formula (10) per m e calcoliamo

$$D^{m+1} g(x) = D\left[p_m\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2}\right] =$$
$$= p'_m\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) e^{-1/x^2} + p_m\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{2}{x^3}\right) e^{-1/x^2}.$$

Poniamo

$$p_{m+1}(t) = -p' m(t) \cdot t^2 + 2\, p_m(t) \cdot t^3.$$

Allora p_{m+1} è ancora un polinomio e

$$D^{m+1} g(x) = p_{m+1}\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2}.$$

È così provata la (10). A questo punto possiamo calcolare

$$\lim_{x\to 0^+} D^m g(x) = \lim_{y\to+\infty} \frac{p_m(y)}{e^{y^2}} = 0.$$

È così provato che tutte le derivate di f e di g tendono a 0 per $x \to 0$, dunque il corollario precedente assicura che $F \in C^\infty(\mathbb{R})$. □

Definizione 9. *Se $f \in C^0(\mathbb{R})$ il supporto di f è l'insieme*

$$\text{supp}(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}}.$$

Corollario 10. *Esiste una funzione $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ tale che $f \equiv 0$ su $(-\infty, 0]$ e $f \equiv 1$ su $[1, \infty)$.*

Dimostrazione. Indichiamo con F una qualunque funzione liscia su tutto l'asse reale e tale che $F(x) = 0$ per $x < 0$ ed $F(x) > 0$ per $x > 0$. Il teorema precedente assicura l'esistenza di tali funzioni. Poniamo

$$\psi(x) = F(x)F(1 - x). \tag{11}$$

La funzione ψ è liscia su tutto $\mathbb{R}$. Sia

$$g(x) = \int_0^x \psi(\xi)d\xi. \tag{12}$$

Allora $g(x) = 0$ per $x < 0$, mentre per $x \geq 1$, $g(x) = g(1) > 0$. La funzione

$$f(x) = \frac{g(x)}{g(1)} \tag{13}$$

ha le proprietà desiderate. □

Esercizio 5. *Dimostrare in dettaglio che le funzioni ψ e g hanno le proprietà richieste nella dimostrazione.*

Esercizio 6. *Siano I e J intervalli aperti di $\mathbb{R}$ tali che la chiusura di I sia limitata e sia contenuta in J. Dimostrare che esiste una funzione $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ tale che $\varphi \equiv 1$ su $\bar{I}$ e $\varphi \equiv 0$ fuori di J (cioè su $\mathbb{R} - J$).*

Definizione 11. *Sia $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ e siano $a < b$ due numero reali. Diciamo che una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è di classe C^k sull'intervallo chiuso $[a, b]$ se esiste una funzione $\tilde{f}$ definita su un intervallo aperto J, tale che $[a, b] \subset J$, $\tilde{f} \in C^k(J)$ e $\tilde{f}_{|[a,b]} = f$.*

Esercizio 7. *Sia $k \in \mathbb{N}$ e sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Supponiamo che per ogni i da 0 a k esistano e siano finiti i limiti*

$$\lim_{x \to a^+} D^i f(x) \qquad \lim_{x \to b^-} D^i f(x).$$

Dimostrare che allora esiste una funzione $\tilde{f} \in C^k(\mathbb{R})$ tale che $f = \tilde{f}_{|[a,b]}$. In particolare $f \in C^k([a,b])$. (Suggerimento: incollare oppurtuni polinomi alla sinistra ed alla destra di f.)

Il risultato analogo per $k = \infty$ è decisamente più complicato e va sotto il nome di Lemma di Seeley.