Esame di Istituzioni di Geometria - I modulo - 26/2/2010

Esercizio 1. Sia

$$f : S^3 \to \mathbb{R} \qquad f(x_0, x_1, x_2, x_3) = -x_0^4 + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4.$$

1. Determinare il luogo dei punti critici di f.
2. Determinare l'insieme dei valori regolari di f.
3. Dimostrare che $M := f^{-1}(0)$ è una varietà differenziabile compatta.
4. Dimostrare che M è sconnessa.
5. Sia $p = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0, 0)$. Determinare delle equazioni per T_pM.
6. Sia

   $$N := \{(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \in \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) : x_0^4 = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4\}.$$

   Dimostrare che N è una sottovarietà liscia di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.
7. Sia $g : N \to S^2$ l'applicazione

   $$g(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) = \left(\frac{x_1^2}{x_0^2}, \frac{x_2^2}{x_0^2}, \frac{x_3^2}{x_0^2} \right).$$

   Verificare che g è ben definita e liscia. Determinare l'immagine di g e dimostrare che g ha infiniti punti critici.

Esercizio 2. Poniamo

$$A := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0, y = -1\}$$
$$B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0, y = 1\}$$
$$C := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0, x^2 + y^2 = 9\}$$
$$\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus (A \cup B \cup C)$$
$$T := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2 + y^2} - 3)^2 + z^2 = 1\}.$$

1. Calcolare il gruppo fondamentale di Ω e indicare un insieme di generatori.
2. Esiste una deformazione di Ω su T?