

Prova scritta di Algebra 2 - 13/7/2022

Esercizio 1. Sia $\alpha = \sqrt{2}$, $\beta = \sqrt{5}$ e $E := \mathbb{Q}(\alpha, \beta)$.

- (1) Provare che $\beta \notin \mathbb{Q}(\alpha)$ e calcolare $[E : \mathbb{Q}]$.
- (2) Dimostrare che $\gamma = \alpha + \beta$ è un elemento primitivo per l'estensione E/\mathbb{Q} .
- (3) Dimostrare che $f(X) := X^4 - 14X^2 + 9$ è il polinomio minimo di γ su \mathbb{Q} .
- (4) Dimostrare che E è il campo di spezzamento di f su \mathbb{Q} .
(Suggerimento: $f(\alpha - \beta) = 0$.)
- (5) Determinare il gruppo $\text{Gal}(E/\mathbb{Q})$.

Esercizio 2.

- (1) Dimostrare che un gruppo di ordine 105 ha un 5-Sylow normale o un 7-Sylow normale.
- (2) Classificare i gruppi di ordine 105 che hanno un 5-Sylow normale.

Esercizio 3. Poniamo

$$A := \text{Hom}(\mathbb{Z}/9 \oplus \mathbb{Z}/81, \mathbb{Z}/54 \oplus \mathbb{Z}/6).$$

- (1) Scrivere A come somma diretta di gruppi ciclici.
- (2) Calcolare i divisori elementari di A .