

Prova scritta di Algebra 2 - 13/6/2022

**Esercizio 1.** Poniamo

$$A_1 := \mathbb{Z}/18 \times \mathbb{Z}/2, \quad A_2 := \mathbb{Z}/36,$$
$$A_3 := \text{Hom}(\mathbb{Z}/108, \mathbb{Z}/144), \quad A_4 := \mathbb{Z}/9 \times (\mathbb{Z}/2)^2.$$

- (1) Quali fra i gruppi  $A_i$  sono isomorfi?
- (2) Per  $i = 1, 2, 3, 4$ , quanti sono i sottogruppi di  $A_i$  isomorfi a  $\mathbb{Z}/18$ ?

**Esercizio 2.** (1) Classificare i gruppi di ordine 153.

- (2) Classificare i gruppi di ordine 306 che hanno un 3-Sylow ciclico e normale.

**Esercizio 3.** Consideriamo il polinomio

$$f(X) = X^5 - 2X^4 - 5X^3 + 10X^2 + 5X - 10.$$

- (1) Determinare esplicitamente il campo di spezzamento  $E$  di  $f$  su  $\mathbb{Q}$ , ossia individuare degli elementi  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in E$  tali che  $E = \mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$
- (2) Calcolare  $[E : \mathbb{Q}]$ .
- (3) Determinare il gruppo di Galois di  $f$  su  $\mathbb{Q}$ .
- (4) Quanti sono i campi intermedi fra  $\mathbb{Q}$  ed  $E$ ?